

Wojciech Kordecki  
Anna Łyczkowska-Hanćkowiak

---

# MATEMATYKA DYSKRETNA DLA INFORMATYKÓW



Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiejkolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz Wydawnictwo HELION dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz Wydawnictwo HELION nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Małgorzata Kulik

Projekt okładki: Studio Gravite / Olsztyn  
Obarek, Pokoński, Pazdrijowski, Zaprucki

Grafika na okładce została wykorzystana za zgodą [Shutterstock.com](https://www.shutterstock.com)

Wydawnictwo HELION  
ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE  
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63  
e-mail: [helion@helion.pl](mailto:helion@helion.pl)  
WWW: <http://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!  
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres  
[http://helion.pl/user/opinie/madyin\\_ebook](http://helion.pl/user/opinie/madyin_ebook)  
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-283-4858-5

Copyright © Helion 2018

- [Poleć książkę na Facebook.com](#)
- [Kup w wersji papierowej](#)
- [Oceń książkę](#)

- [Księgarnia internetowa](#)
- [Lubię to! » Nasza społeczność](#)

# Spis treści

<b>Oznaczenia</b>	<b>1</b>
<b>Wstęp</b>	<b>3</b>
<b>I. Podstawy</b>	<b>7</b>
<b>1. Indukcja i rekurencja</b>	<b>9</b>
1.1. Zasada indukcji matematycznej . . . . .	9
1.2. Zbiory częściowo uporządkowane . . . . .	11
1.3. Rekurencja . . . . .	15
1.4. Zadania . . . . .	23
<b>2. Rozmieszczenia i permutacje</b>	<b>27</b>
2.1. Funkcje i rozmieszczenia . . . . .	27
2.2. Permutacje . . . . .	30
2.3. Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju . . . . .	38
2.4. Zadania . . . . .	41
<b>3. Kombinacje</b>	<b>44</b>
3.1. Współczynnik dwumianowy . . . . .	44
3.2. Generowanie podzbiorów . . . . .	48
3.3. Zbiory z powtórzeniami . . . . .	50
3.4. Zadania . . . . .	52

<b>4. Podziały</b>	<b>54</b>
4.1. Podziały zbioru . . . . .	54
4.2. Zasada szufladkowa Dirichleta . . . . .	55
4.3. Zasada włączania-wyłączania . . . . .	58
4.4. Liczby Stirlinga drugiego rodzaju . . . . .	63
4.5. Podziały liczb . . . . .	67
4.6. Zadania . . . . .	69
<b>5. Funkcje tworzące</b>	<b>72</b>
5.1. Szeregi formalne . . . . .	72
5.2. Rozwiązanie rekurencji . . . . .	75
5.3. Zastosowania funkcji tworzących . . . . .	77
5.4. Sploty . . . . .	79
5.5. Zadania . . . . .	82
<b>II. Grafy</b>	<b>83</b>
<b>6. Elementy teorii grafów</b>	<b>85</b>
6.1. Podstawowe pojęcia . . . . .	85
6.2. Macierze grafów . . . . .	91
6.3. Izomorfizm, podstawowe własności i typy grafów . . .	102
6.4. Kolorowanie i wielomiany . . . . .	111
6.5. Zadania . . . . .	115
<b>7. Cykle, drzewa, pokrycia</b>	<b>120</b>
7.1. Grafy Eulera i Hamiltona, turnieje . . . . .	120
7.2. Spójność . . . . .	127
7.3. Drzewa . . . . .	129
7.4. Skojarzenia . . . . .	140
7.5. Zadania . . . . .	144

<b>8. Wybrane algorytmy grafowe</b>	<b>148</b>
8.1. Algorytmy przeszukiwania . . . . .	148
8.2. Minimalne drzewa spinające i minimalne drogi . . . . .	152
8.3. Przepływy w sieciach . . . . .	157
8.4. Zadania . . . . .	164
 <b>III. Ogólne struktury kombinatoryczne</b>	 <b>167</b>
<b>9. Ciała i przestrzenie wektorowe</b>	<b>169</b>
9.1. Ciała skończone . . . . .	169
9.2. Skończone przestrzenie wektorowe . . . . .	171
9.3. Skończone geometrie rzutowe i afiniczne . . . . .	175
9.4. Zadania . . . . .	179
 <b>10. Matroidy</b>	 <b>181</b>
10.1. Podstawy . . . . .	181
10.2. Transwersale . . . . .	189
10.3. Matroidy dualne . . . . .	192
10.4. Wielomiany Tutte'a . . . . .	196
10.5. Zadania . . . . .	200
 <b>11. Systemy i algorytmy zachłanne</b>	 <b>203</b>
11.1. Systemy zachłanne . . . . .	203
11.2. Algorytmy zachłanne . . . . .	207
11.3. Zadania . . . . .	212
 <b>Rozwiązania, odpowiedzi i wskazówki</b>	 <b>215</b>
Rozdział 1 . . . . .	217
Rozdział 2 . . . . .	223
Rozdział 3 . . . . .	227

Rozdział 4 . . . . .	230
Rozdział 5 . . . . .	233
Rozdział 6 . . . . .	236
Rozdział 7 . . . . .	241
Rozdział 8 . . . . .	246
Rozdział 9 . . . . .	250
Rozdział 10 . . . . .	253
Rozdział 11 . . . . .	256
 <b>Dodatki</b>	 <b>259</b>
 <b>A. Podstawowe pojęcia</b>	 <b>261</b>
A.1. Notacja . . . . .	261
A.2. Zbiory . . . . .	262
A.3. Algebra . . . . .	263
A.4. Rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy . . . . .	265
A.5. Prawdopodobieństwo . . . . .	266
 <b>B. Sławni matematycy</b>	 <b>267</b>
 <b>Literatura</b>	 <b>283</b>
 <b>Skorowidz</b>	 <b>285</b>

# Oznaczenia

Podane są jedynie te symbole, które nie mają różnych znaczeń. Numer strony wskazuje gdzie dany symbol został zdefiniowany.

Symbol	opis	strona
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych	262
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych	262
$\mathbb{Z}^+$	zbiór liczb całkowitych nieujemnych	262
$\mathbb{Z}_k$	pierścień mod $k$	170
$\mathbb{Z}_p$	ciało mod $p$	170
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych	262
$\mathbb{R}^+$	zbiór liczb rzeczywistych dodatnich	262
$\lfloor x \rfloor$	funkcja „podłoga”	18
$\lceil x \rceil$	funkcja „sufit”	18
$!n$	silnia dolna	28
$n^{\underline{k}}$	potęga ubywająca	28
$n^{\overline{k}}$	potęga przyrastająca	28
$s(n, k)$	liczby Strilinga pierwszego rodzaju	38
$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$	nieoznakowane liczby Strilinga pierwszego rodzaju	39
$\{n \atop k\}$	liczby Strilinga drugiego rodzaju	63
$\binom{n}{k}$	symbol Newtona	44
$\binom{n}{k}_q$	symbol Gaussa	174
$\Pi(X)$	zbiór wszystkich podziałów zbioru $X$	54
$\Pi_k(X)$	zbiór wszystkich podziałów zbioru $X$ na $k$ bloków	54

$\Gamma(v)$	zbiór wierzchołków sąsiednich z $v$	89
$V^+(v)$	zbiór końców łuków wychodzących z wierzchołka $v$	89
$V^-(v)$	zbiór początków łuków wchodzących do wierzchołka $v$	89
$\chi(G)$	liczba chromatyczna grafu $G$	111
$\chi'(G)$	indeks chromatyczny grafu $G$	113
$P(G; k)$	wielomian chromatyczny grafu $G$	114
$\lambda(G)$	spójność krawędziowa grafu $G$	127
$\mu(G)$	spójność wierzchołkowa grafu $G$	127
$\gamma(G)$	liczba cyklomatyczna grafu $G$	131
$\delta(G)$	średnica grafu $G$	107
$r(G)$	promień grafu $G$	107
$\rho(A)$	funkcja rzędu w matroidzie	182
$\sigma(A)$	funkcja rozpięcia w matroidzie	183
$G^*$	graf dualny do grafu $G$	194
$G \setminus e$	usunięcie krawędzi $e$ z grafu $G$	108
$G/e$	ściągnięcie krawędzi $e$ w grafie $G$	108
$GF(q)$	ciało Galois $q$ -elementowe	170
$PG(n-1, q)$	geometria rzutowa wymiaru $n-1$	176
$AG(n)$	geometria afiniczna wymiaru $n$	178
$M \setminus A$	ograniczenie matroidu $M$ do $E \setminus A$	186
$M/A$	ściągnięcie matroidu $M$ do $E \setminus A$	186
$\Delta$	różnica symetryczna zbiorów	262
$M^*$	matroid dualny do matroidu $M$	192
$T(M; x, y)$	wielomian Tutte'a matroidu $M$	196

# Wstęp

## Początki

Matematyka dyskretna nazywana jest też kombinatoryką, analizą kombinatoryczną lub matematyką zbiorów skończonych. Ostatnia nazwa, najrzadziej używana, najdokładniej określa zakres tego działu matematyki, którego początki sięgają XVI wieku. Rozwój kombinatoryki, a także rachunku prawdopodobieństwa, który w swoich początkach opierał się wyłącznie na kombinatoryce, został zapoczątkowany przez problemy gier hazardowych. Jednym z pierwszych, który podjął tę tematykę, był matematyk włoski N. Tartaglia<sup>69\*</sup>. W XVII wieku teoretycznymi badaniami zagadnień kombinatoryki zajmowali się uczeni francuscy B. Pascal<sup>55</sup> i P. Fermat<sup>17</sup>. Do rozwoju kombinatoryki w istotny sposób przyczynili się też J. Bernoulli<sup>4</sup>, G. W. Leibniz<sup>41</sup>, L. Euler<sup>16</sup>. Ciągły rozwój tej dyscypliny jest ściśle związany z jej zastosowaniami w różnych dziedzinach nauki, z których zastosowania w informatyce są jednymi z najważniejszych.

## Ważne książki

Inspiracją do napisania książki były prowadzone przez autorów zajęcia z matematyki dyskretnej i teorii grafów dla studentów Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej, Wydziału Informatyki i Gospodarki Elektronicznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu oraz Wydziału Nauk Technicznych i Ekonomicznych Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy. Przygotowując te zajęcia, autorzy intensywnie korzystali z dwóch bardzo ważnych książek. Pierwszą z nich była dawno wydana i niestety nigdy niewznawiana monografia W. Lipskiego i W. Marka *Analiza kombinatoryczna* [14] – pierwsza taka monografia w Polsce. Drugą był podręcznik W. Lipskiego *Kombinatoryka dla programistów* [13] – pierwszy w Polsce podręcznik tego przedmiotu adresowany do informatyków.

---

\*W dodatku *Ślawni matematycy* na str. 267 podajemy krótkie biogramy matematyków, autorów ważnych twierdzeń matematyki dyskretnej

Naszym celem oczywiście nie jest ani streszczenie, ani kompilacja tych znakomitych książek. Potrzeby kształcenia informatyków wymuszają naszym zdaniem poszerzenia wykładu o tematy rzadziej prezentowane w dostępnych po polsku podręcznikach matematyki dyskretnej. Dlatego oprócz podstawowych, standardowych wiadomości dajemy wybór czy przegląd tych ważniejszych faktów, które w podręcznikach spotykane są rzadziej. Natomiast te działy matematyki dyskretnej, które można znaleźć w innych dostępnych pozycjach literatury, zostały ograniczone lub nawet pominięte. Przedstawiliśmy w początkowych rozdziałach jedynie te, które są podstawą materiału prezentowanego w częściach dalszych.

*O czym  
piszemy?*

Książka składa się z trzech zasadniczych części. W pierwszej z nich omawiane są klasyczne zagadnienia kombinatoryczne. Podajemy własności zbiorów skończonych i metody obliczania ich charakterystyk. Są to na przykład: indukcja i rekurencja, permutacje i liczby Stirlinga pierwszego rodzaju, kombinacje i współczynniki dwumianowe, podziały i liczby Stirlinga drugiego rodzaju, a także funkcje tworzące. Większość z przedstawionych w tej części zagadnień można też znaleźć w nieco rozszerzonej postaci lub z naciskiem na inne aspekty w podręcznikach J. Jaworskiego, Z. Palki i J. Szymańskiego *Matematyka dyskretna dla informatyków* [10] i R. Rębowskiego pod tym samym tytułem [17], a także w M. Zakrzewskiego *Matematyka dyskretna* [29]. Podręcznik *Wykłady z kombinatoryki* Z. Palki i A. Rucińskiego [16] poświęcony jest głównie wybranym tematom z tego zakresu. Dużo więcej informacji na temat omawianych w tej części zagadnień, przedstawionych w sposób zdecydowanie bardziej zaawansowany, można znaleźć w książce R. Grahama, D. Knutha i O. Patashnika *Matematyka konkretna* [9].

Część II książki przedstawia wybrane elementy teorii grafów. Oprócz podstawowych pojęć podajemy głównie takie fakty, z których korzystamy przy przedstawieniu zagadnień bardziej ogólnych. Szerzej są omówione na przykład zagadnienia związane z drzewami i cyklami w grafach – ze względu na przedstawione później elementy teorii matroidów i greedoidów. Czytelnik zainteresowany teorią grafów ma do wyboru wiele znakomitych podręczników, przede wszystkim książkę R. J. Wilsona *Wprowadzenie do teorii grafów* [26]. Elementy teorii grafów pojawiają się również w innych podręcznikach przeznaczonych dla informatyków, choć zwykle z naciskiem na aspekty algorytmiczne tej teorii, na przykład w książce Lipskiego [13] oraz w niezwykle ważnej

dla informatyków, obszernej monografii T. H. Cormena, C. E. Leiser-sona, R. L. Rivesta i C. Steina *Wprowadzenie do algorytmów* [7].

Część III poświęcona jest ogólnym strukturom kombinatorycznym: ciałom i geometriom skończonym, matroidom i greedoidom. Zagadnienia te w literaturze polskiej pojawiają się bardzo rzadko. Krótkie rozdziały dotyczące teorii matroidów można znaleźć w książkach [13] i [26], a elementy tej teorii związane z algorytmami zachłannymi również w [7]. Staramy się przybliżyć czytelnikom w sposób dość przystępny tę nie najłatwiejszą, ale bardzo ważną tematykę.

*Dla kogo  
piszemy?*

Podręcznik jest adresowany głównie do studentów kierunków informatycznych. Matematyka dyskretna, w tym teoria grafów, jest przedmiotem standardowo mieszczącym się w programach kształcenia informatyków. Niemniej zakres tej książki, zwłaszcza w części III, daleko wykracza poza podstawowy kurs przedmiotu. Może więc być ona przydatna również dla studentów matematyki, doktorantów oraz dla programistów mających do czynienia z zaawansowanymi metodami i algorytmami. Informatyka jest obecnie przedmiotem także innych kierunków studiów – technicznych, przyrodniczych i ekonomicznych. Niniejsza pozycja tam też może znaleźć czytelników.

*Co dalej?*

Nasza książka, ze względu na adresatów, jest napisana w sposób możliwie ścisły, choć nie zawiera zbyt wielu dowodów. Część zagadnień została tylko zasygnalizowana. Szersze ich omówienie – zarówno na poziomie akademickim, jak i popularnym – można znaleźć w różnych pozycjach literatury. Wiele tematów jest również przedstawionych w klasycznym dla informatyków dziele autorstwa D. Knutha *Sztuka programowania* [11]. Obszerne, ale przystępne omówienie podstawowych zagadnień zawiera *Matematyka dyskretna* K. A. Rossa i C. R. B. Wrighta [19].

Oprócz wyżej wymienionych książek warto zwrócić uwagę na *Podróżę po Imperium Liczb* A. Nowickiego [15] oraz *Dowody z książki* M. Aignera i G. M. Zieglera [2]<sup>†</sup>. Najbardziej popularne podejście do wielu z omawianych zagadnień znalazło się w tłumaczonej z hiszpańskiego serii książek *Świat jest matematyczny*. Jest to czterdzieści to-mów poświęconych najróżniejszym dziedzinom matematyki. Wśród nich sporo jest bezpośrednio związanych z zagadnieniami poruszany-mi przez nas.

---

<sup>†</sup>Nowsze, czwarte wydanie angielskie tej książki: M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, 4th ed., 2013.

Algorytmy przedstawione w tej książce sformułowane są w sposób opisowy, a nie w wybranym języku programowania. Te, które zostały napisane w Pascalu, można znaleźć między innymi w książkach W. Lipskiego [13] i M. Sysły [23]. Programy w językach C oraz C++ omówione są w książkach R. Sedgewicka [21] i [22], a także A. V. Aho i J. D. Ullmana [1], M. Sysły [23] oraz P. Wróblewskiego [28]. Algorytmy zapisane w języku Python są przedstawione w książkach M. Sysły [23] i [24]. W naszej książce pominęliśmy całkowicie zagadnienia złożoności obliczeniowej prezentowanych algorytmów. Tematyka ta jest obszernie omówiona w cytowanych powyżej pozycjach, na przykład w [7], [13] i [28]. Pominęto też ważne dla informatyków zagadnienia algebr Boole’a. Czytelnik zainteresowany tym tematem znajdzie go na przykład w podręcznikach [10], [17], [19] oraz [18].

Na końcu każdego rozdziału umieszczone są zadania. Nieco trudniejsze zostały oznaczone gwiazdką, a trudne – dwiema gwiazdkami. Do części z nich podajemy pełne rozwiązania, do niektórych tylko odpowiedzi lub wskazówki. Do zadań dwugwiazdkowych podane są kompletne rozwiązania.

Niektóre zadania oraz ich rozwiązania zostały zaczerpnięte między innymi z książek: K. A. Rybnikowa [20], V. Bryanta [4], M. Zakrzewskiego i T. Żaka [30], choć zapewne można je znaleźć i w innych pozycjach literaturowych, na przykład w zbiorze zadań R. Rębowskiego i J. Płaskonki [18]. Część zamieszczonych zadań pochodzi z list utworzonych na potrzeby ćwiczeń przez różnych autorów. Pochodzenia niektórych zadań i przykładów nie jesteśmy w stanie wskazać. Na pewno jednak wiele z nich było opracowanych przez doc. dr. Zbigniewa Romanowicza<sup>63</sup>.

*Wojciech Kordecki*  
*Państwowa Wyższa Szkoła*  
*Zawodowa im. Witelona*  
*w Legnicy*

*Anna Łyczkowska-Hanćkowiak*  
*Wyższa Szkoła Bankowa*  
*w Poznaniu*

**Część I**

**Podstawy**



# 1. Indukcja i rekurencja

## 1.1. Zasada indukcji matematycznej

Zasada indukcji matematycznej jest ważną i wygodną metodą uzasadniania twierdzeń dotyczących własności liczb naturalnych. Stanowi ogólne narzędzie dowodzenia, że pewne twierdzenie o liczbie naturalnej  $n$  jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych  $n \geq n_0$ . Pierwszy znany dowód wykorzystujący indukcję matematyczną przedstawił F. Maurolico<sup>45</sup> w 1575 roku.

*Indukcja  
matematyczna*

Założmy, że dana jest pewna własność  $P$  liczb naturalnych.  $P(n)$  oznacza, że liczba  $n$  ma własność  $P$ . Każda liczba naturalna  $n \geq n_0$  ma własność  $P$ , o ile spełnione są następujące dwa warunki:

1. podstawa indukcji: zachodzi  $P(n_0)$ ,
2. krok indukcyjny: z tego, że zachodzi  $P(n)$ , wynika, że zachodzi  $P(n+1)$ .

*Suma  
kwadratów*

### Przykład 1.1.1

Metodą indukcji matematycznej udowodnimy wzór na sumę sześcianów  $n$  pierwszych liczb naturalnych, to znaczy pokażemy, że dla  $n \geq 1$ :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Warunek początkowy dla  $n = 1$  jest spełniony, gdyż  $1^3 = 1 = \left( \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \right)^2$ . Zakładamy, że wzór zachodzi dla liczby naturalnej  $n$ . Pokażemy, że wzór jest prawdziwy dla liczby  $n+1$ , to znaczy:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left( \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2.$$

Mamy:

$$\begin{aligned}
 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 \\
 &= \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 n^2 + \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 4(n+1) \\
 &= \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 (n^2 + 4n + 4) = \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 (n+2)^2 \\
 &= \left( \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Na podstawie zasady indukcji matematycznej wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ .

### Przykład 1.1.2

Pokażemy, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $6^{n+2} + 7^{2n+1}$  jest podzielna przez 43. Sprawdzamy, że dla  $n = 1$  mamy:  $6^3 + 7^3 = 559 = 13 \cdot 43$ , co oznacza, że podstawa indukcji jest spełniona. Zakładamy, że liczba  $6^{n+2} + 7^{2n+1}$  jest podzielna przez 43, to znaczy istnieje taka liczba całkowita  $l$ , że  $6^{n+2} + 7^{2n+1} = 43l$ . Pokażemy, że liczba

$$6^{(n+1)+2} + 7^{2(n+1)+1} = 6^{n+3} + 7^{2n+3}$$

też jest podzielna przez 43. Mamy:

$$\begin{aligned}
 6^{n+3} + 7^{2n+3} &= 6^{n+3} + 6 \cdot 7^{2n+1} - 6 \cdot 7^{2n+1} + 7^{2n+3} \\
 &= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 7^{2n+3} - 6 \cdot 7^{2n+1} \\
 &= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 7^{2n+1}(7^2 - 6) \\
 &= 6 \cdot 43l + 7^{2n+1} \cdot 43 = 43(6l + 7^{2n+1}).
 \end{aligned}$$

Ponieważ  $6l + 7^{2n+1}$  jest liczbą całkowitą, teza indukcyjna została udowodniona.

*Liczby  
harmoniczne*

### Przykład 1.1.3

Liczby harmoniczne definiuje się jako sumę odwrotności kolejnych liczb naturalnych, to znaczy:

$$H_0 = 1$$

oraz dla  $n > 0$ :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Korzystając z zasady indukcji matematycznej, pokażemy, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność:

$$H_{2^n} \leq n + 1.$$

Podstawa indukcji:

$$H_{2^0} = H_1 = 1 \leq 1 + 1.$$

Krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}} &= H_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\leq H_{2^n} + \frac{1}{2^n} 2^n = H_{2^n} + 1 \leq (n + 1) + 1. \end{aligned}$$

Na podstawie zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

Zasada indukcji matematycznej opiera się na prawie logicznym:

$$[p \wedge (p \implies q)] \implies q.$$

Przyjmuje wtedy postać:

$$[P(0) \wedge \forall_{n \geq 0} (P(n)) \implies P(n+1)] \implies \forall_{n \geq 0} P(n). \quad (1.1.1)$$

Wzór (1.1.1) jest również zapisem procedury iteracyjnej, to znaczy wyznaczamy  $P(n+1)$  na podstawie wcześniej wyznaczonego  $P(n)$ .

Zasadę indukcji matematycznej można także sformułować inaczej. Niech  $p(m), p(m+1), \dots$  będzie ciągiem zdań. Jeśli:

- (P) zdanie  $p(m)$  jest prawdziwe oraz
- (I) zdanie  $p(k+1)$  jest prawdziwe, tylko jeśli zdanie  $p(k)$  jest prawdziwe i  $m \leq k$ ,

to wszystkie te zdania są prawdziwe.

Warunek (P) nazywamy *warunkiem początkowym*, natomiast (I) nazywamy *krokiem indukcyjnym*.

## 1.2. Zbiory częściowo uporządkowane

*Porządek  
częściowy*

Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem (skończonym). Relacja to dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów (patrz dodatek A.2). Relacja  $\preceq$  na  $X$  nazywa się *porządkiem częściowym* (ang. *partial order*), jeśli jest

$$\begin{aligned} \text{zwrotna:} & \quad x \preceq x, \\ \text{przechodnia:} & \quad x \preceq y \wedge y \preceq z \implies x \preceq z, \\ \text{antyśmetryczna:} & \quad x \preceq y \wedge y \preceq x \implies x = y. \end{aligned}$$

*Posety*

Parę  $(X, \preceq)$  nazywa się *zbiorem częściowo uporządkowanym* (ang. *partially ordered set = poset*). Jeżeli wiadomo, o jaki porządek chodzi, to zbiorem częściowo uporządkowanym nazywa się też sam zbiór  $X$ . Jeżeli dla pewnych elementów  $x, y \in X$  zachodzi  $x \preceq y$  lub  $y \preceq x$ , to

elementy te są *porównywalne*. Jeżeli dowolne dwa elementy są porównywalne, to porządek nazywa się *liniowym* (ang. *linear order*). Jeżeli  $x \preceq y$  oraz  $x \neq y$ , to piszemy  $x \prec y$  i czytamy „ $x$  poprzedza  $y$ ”.

Element  $x \in X$  jest:

- *minimalny*, jeśli nie istnieje  $y \in X$  taki, że  $y \prec x$ ,
- *maksymalny*, jeśli nie istnieje  $y \in X$  taki, że  $x \prec y$ ,
- *najmniejszy*, jeśli  $x \preceq y$  dla każdego  $y \in X$ ,
- *największy*, jeśli  $y \preceq x$  dla każdego  $y \in X$ .

Elementy minimalne i elementy maksymalne w zbiorze skończonym zawsze istnieją. Zarówno element minimalny, jak i maksymalny może być jeden, ale może też ich być więcej. Element najmniejszy i element największy nie zawsze istnieją, nawet w zbiorze skończonym. Element najmniejszy nazywa się *zerem*, a największy *jedynką* zbioru częściowo uporządkowanego, oznaczane są one często przez **0** i **1**.

Zero i jeden

Dla danego zbioru  $X$  rodzinę wszystkich jego podzbiorów oznacza się przez  $2^X$ .

### Przykład 1.2.1

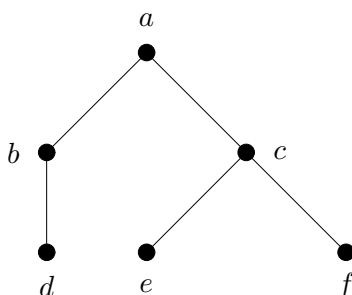
Rodzina  $\mathcal{R} = 2^X$  wszystkich podzbiorów dowolnego (niekoniecznie skończonego) zbioru  $X$  z relacją zawierania  $\subseteq$  jest zbiorem częściowo uporządkowanym  $(\mathcal{R}, \subseteq)$ . Elementem największym jest  $X$ , a najmniejszym  $\emptyset$ . Również dowolna rodzina  $\mathcal{S} \subseteq 2^X$  podzbiorów zbioru  $X$  z taką samą relacją  $\subseteq$  jest zbiorem częściowo uporządkowanym, choć **0** i **1** mogą być inne lub mogą nie istnieć.

Diagram  
Hassego

Wygodnym sposobem reprezentacji skończonego zbioru częściowo uporządkowanego jest diagram Hassego<sup>30</sup>. Składa się on z punktów odpowiadających elementom  $x \in X$ , przy czym  $x$  jest połączony linią z  $y$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \prec y$  oraz nie istnieje element  $u$  taki, że  $x \prec u \prec y$ . Zwykle nie zaznaczamy orientacji diagramu. Przyjmujemy, że jeśli  $x \prec y$ , to punkt  $y$  znajduje się na diagramie wyżej niż punkt  $x$ . Możemy też taką sytuację zapisać w postaci uporządkowanej pary  $(x, y)$ , co oznacza, że  $x$  poprzedza  $y$ . Relacja  $x \preceq y$  oznacza, że  $x \prec y$  lub  $x = y$ .

### Przykład 1.2.2

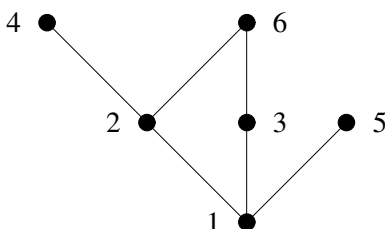
Rysunek 1.1 przedstawia diagram Hassego zbioru częściowo uporządkowanego  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ , gdzie relacje między elementami opisują pary:  $(d, b)$ ,  $(b, a)$ ,  $(e, c)$ ,  $(f, c)$ ,  $(c, a)$ . W zbiorze tym  $a$  jest jednocześnie elementem największym i maksymalnym. Elementami minimalnymi są  $d, e, f$ . Element najmniejszy nie istnieje.



Rysunek 1.1. Diagram Hassego zbioru częściowo uporządkowanego, gdzie relacje między elementami opisują pary:  $(d, b)$ ,  $(b, a)$ ,  $(e, c)$ ,  $(f, c)$ ,  $(c, a)$

### Przykład 1.2.3

Niech  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Rysunek 1.2 przedstawia zbiór częściowo uporządkowany  $(X, |)$ , gdzie  $m|n$  ( $m$  dzieli  $n$ , to znaczy  $n$  jest całkowitą wielokrotnością liczby  $m$ ). W zbiorze tym nie ma elementu największego, elementami maksymalnymi są 4, 5, 6, a liczba 1 jest jednocześnie elementem najmniejszym i minimalnym.



Rysunek 1.2. Diagram Hassego zbioru  $(X, |)$

Sformułujemy teraz dwa twierdzenia znane jako zasady – zasadę minimum i zasadę maksimum.

*Zasada  
minimum*

#### **Twierdzenie 1.2.1**

*W każdym niepustym zbiorze  $A$  liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza.*

*Zasada  
maksimum*

#### **Twierdzenie 1.2.2**

*W każdym niepustym i ograniczonym zbiorze  $A$  liczb naturalnych istnieje liczba największa.*

*Łańcuchy*

Niech  $(X, \preceq)$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i  $Y \subseteq X$ . Jeśli każde dwa elementy zbioru  $Y$  są porównywalne, to  $Y$  jest *łańcuchem* (ang. *chain*), jeśli zaś żadne dwa różne elementy nie są porównywalne, to  $Y$  jest *antyłańcuchem* (ang. *antichain*). Każdy łańcuch ma element najmniejszy i największy, czyli *początek* i *koniec* łańcucha.

*Kresy zbiorów*

Ograniczeniem dolnym zbioru  $Y \subseteq X$  nazywa się dowolny element  $a \in X$  taki, że  $a \preceq x$  dla każdego  $x \in Y$ , natomiast ograniczeniem górnym zbioru  $Y \subseteq X$  nazywa się dowolny element  $b \in X$  taki, że  $x \preceq b$  dla każdego  $x \in Y$ . Niech  $A(Y)$  i  $B(Y)$  oznaczają odpowiednio zbiór wszystkich ograniczeń górnych i dolnych zbioru  $Y$ . Jeśli w  $A(Y)$  istnieje element najmniejszy, to nazywamy go kresem górnym (*supremum*). Jeśli w  $B(Y)$  istnieje element największy, to nazywamy go kresem dolnym (*infimum*). Kresy dolne i górne zbioru  $Y$  oznaczane są odpowiednio przez  $\inf(Y)$  i  $\sup(Y)$ .

Używa się też oznaczeń:

$$x \vee y = \sup\{x, y\},$$

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}.$$

*Kraty*

*Kratą* (ang. *lattice*) jest zbiór  $X$  częściowo uporządkowany relacją  $\preceq$  taki, że dla każdej pary  $x, y \in X$  istnieją kres dolny  $x \wedge y$  oraz kres górny  $x \vee y$ . Krata nazywa się *zupełną* (ang. *complete lattice*), gdy istnieją  $\inf(Y)$  i  $\sup(Y)$  dla każdego podzbioru  $Y$  kraty  $(X, \preceq)$ . Krata nazywa się *rozdzielną* (ang. *distributive lattice*), gdy dla dowolnych elementów  $x, y, z$  kraty  $(X, \preceq)$  zachodzą równości:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

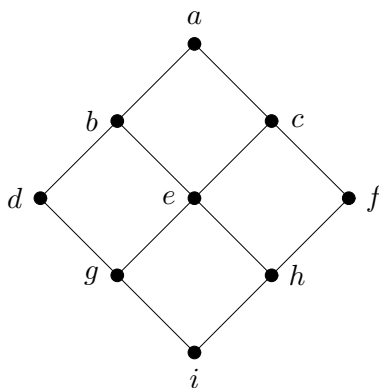
Każda krata skończona (a tylko o takich mówimy w tej książce) jest zupełna.

**Przykład 1.2.4**

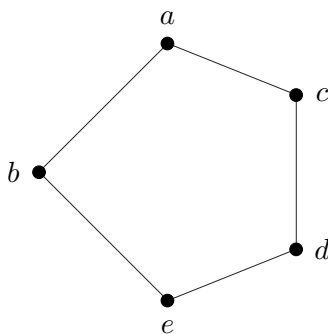
Rysunek 1.3 przedstawia diagram Hassego dla zbioru  $X$  częściowo uporządkowanego, który jest kratą,  $\sup(X) = a$  oraz  $\inf(X) = i$ .

Analogicznie rysunek 1.4 przedstawia diagram Hassego dla zbioru  $Y$  tworzącego kratę, ale tym razem nierozdzielną:  $\sup(Y) = a$  oraz  $\inf(Y) = e$ .

W punkcie tym przedstawione zostały jedynie najważniejsze fakty o relacjach częściowego porządku. Znacznie więcej można znaleźć na przykład w książce [5].



Rysunek 1.3. Krata rozdzielna



Rysunek 1.4. Krata nierozdzielna

## 1.3. Rekurencja

Rekurencja, zwana także rekursją (ang. *recursion*), to w logice, programowaniu i matematyce odwoływanie się definicji do samej siebie. Algorytm rekurencyjny polega na tym, że rozwiązanie badanego problemu wyraża się za pomocą rozwiązań tego samego problemu dla danych o mniejszych rozmiarach.

*Silnia*

Silnia (ang. *factorial*) liczby  $n$  (zapisywana jako  $n!$ ) to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do  $n$ , czyli:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Przyjmuje się, że  $0! = 1$ . Rekurencyjnie można zapisać silnię w postaci:

$$0! = 1,$$

$$n! = n(n-1)! \text{ dla } n \geq 1.$$

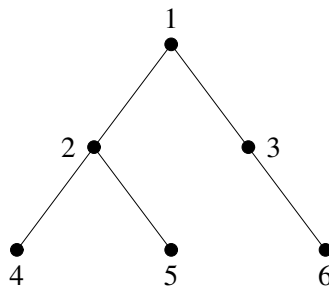
W informatyce rekurencja jest sposobem rozwiązywania problemu przez zastosowanie algorytmu rekurencyjnego. Jego realizacją są obliczenia, w których wydzielony podprogram wywołuje sam siebie. Rekurencja jest stosowana w efektywnych algorytmach sortowania, między innymi w quicksort (patrz na przykład [7], [21]).

Rekurencje były badane już w 1202 roku przez L. Fibonacciego<sup>19</sup>. A. de Moivre<sup>48</sup> wprowadził metodę funkcji tworzących (którą omówimy w punkcie 5.1) do rozwiązywania rekurencji. Rekurencyjnie możemy na przykład definiować ciągi, równania, funkcje. Rekurencja nie musi dotyczyć tylko charakterystyk liczbowych, ale również konstrukcji bardziej skomplikowanych obiektów, co zilustrujemy przykładem drzewa binarnego.

*Drzewo  
binarne*

### Przykład 1.3.1

Drzewem binarnym  $T$  (ang. *binary tree*) o  $n$  wierzchołkach nazywa się drzewo puste  $T = \emptyset$ , gdy  $n = 0$ , lub trójkę  $T = (L, r, P)$ , gdzie  $r$  jest wierzchołkiem zwanym *korzeniem drzewa* (ang. *root*),  $L$  jest drzewem binarnym o  $l$  wierzchołkach (zwanym lewym poddrzewem),  $P$  jest drzewem binarnym o  $p$  wierzchołkach (zwanym prawym poddrzewem) oraz  $l + p + 1 = n$  (o drzewach jako szczególnym przypadku grafów więcej w 7.1). Rekurencja polega tutaj na tym, że każdy element trójki definiującej drzewo odwołuje się do informacji zawartej w wyznaczonych poprzednio mniejszych drzewach. Na rysunku 1.5 przedstawiono konstrukcję drzewa binarnego:



Rysunek 1.5. Rekurencyjna konstrukcja drzewa binarnego

Kolejne kroki rekurencji:

- $T_1 = (T_2, 1, T_3)$ ,
- $T_2 = (T_4, 2, T_5)$ ,  $T_3 = (\emptyset, 3, T_6)$ ,
- $T_4 = (\emptyset, 4, \emptyset)$ ,  $T_5 = (\emptyset, 5, \emptyset)$ ,  $T_6 = (\emptyset, 6, \emptyset)$ .

Ciąg jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeśli:

- (P) określony jest pewien skończony zbiór wyrazów ciągu, zazwyczaj kilka pierwszych lub pierwszy wyraz,
- (R) pozostałe wyrazy ciągu są zdefiniowane za pomocą poprzednich wyrazów ciągu.

Wzór definiujący ciąg w taki sposób nazywa się wzorem, równaniem lub zależnością rekurencyjną. Definicja rekurencyjna odwołuje się do samej siebie, do elementu o mniejszym stopniu komplikacji, określa element ciągu poprzez odwołanie się do elementu poprzedzającego (jednego lub wielu).

### Przykład 1.3.2

Najprostszy definicjami rekurencyjnymi są:

- ciąg arytmetyczny – ciąg liczb rzeczywistych określonych wzorami:
  - (P)  $a_0 = a$ ,
  - (R)  $a_n = a_{n-1} + r$ ;
- ciąg geometryczny – ciąg liczb rzeczywistych określonych wzorami:
  - (P)  $b_0 = b$ ,
  - (R)  $b_n = b_{n-1}q$ .

Liczby  
harmoniczne

### Przykład 1.3.3

W podobny sposób można zdefiniować ciąg liczb harmoniczych  $\{H_n\}$  (patrz przykład 1.1.3):

$$H_1 = 1,$$

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \text{ dla } n \geq 1.$$

Równania  
rekurencyjne

Definicję rekurencyjną tego typu nazywamy też *równaniem rekurencyjnym*. Wyrazy ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie można obliczać na wiele różnych sposobów. Metoda iteracyjna polega na tym, że w momencie wyznaczania elementu  $H_n$  ciągu muszą być znane wszystkie wcześniejsze elementy  $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$ . Jest to metoda bardzo czasochłonna, ponieważ wymaga wyznaczenia początkowych wyrazów ciągu, chociaż nie są one do niczego poza tym potrzebne. Czasem jest to jednak jedyny sposób obliczenia wartości elementu.

**Przykład 1.3.4**

Rozważmy równanie rekurencyjne:

$$\begin{aligned} P_0 &= 0, \\ P_{n+1} &= P_n + n + 1 \text{ dla } n \geq 1. \end{aligned}$$

Jego rozwiązanie to jak najprostsza formuła dająca sposób obliczania kolejnych wyrazów. Metoda, dzięki której możemy łatwo rozwiązać to konkretne równanie, to jego rozwinięcie, czyli cofanie się w rekursji:

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + n = P_{n-2} + (n-1) + n \\ &= \dots = P_0 + (1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Otrzymany wzór ma postać zamkniętą lub zwartą, czyli jest określony przez stałą liczbę operacji arytmetycznych, niezależnych od wskaźnika  $n$ . Nie zawsze trzeba znajdować wszystkie wcześniejsze wyrazy, czasami wystarczy tylko kilka, co pokażemy w przykładzie 1.3.5.

*Podłoga  
i sufit*

Niech  $x$  będzie liczbą rzeczywistą. Wtedy:

- $\lfloor x \rfloor$  to największa liczba całkowita nie większa od  $x$  (podłoga  $x$ , część całkowita  $x$ ), czyli

$$\lfloor x \rfloor = \max\{a \in \mathbb{Z} : a \leq x\};$$

- $\lceil x \rceil$  to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza od  $x$  (sufit  $x$ ), czyli

$$\lceil x \rceil = \min\{a \in \mathbb{Z} : a \geq x\}.$$

W literaturze matematycznej często używane były nawiasy  $[\dots]$  zamiast  $\lfloor \dots \rfloor$ . Zwróćmy też uwagę, że na przykład  $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$ .

**Przykład 1.3.5**

Ciąg  $S$  zdefiniowany jest przez warunki:

- (P)  $S(1) = 1$ ,  
(R)  $S(n) = 2S(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$  dla  $n \geq 2$ .

Obliczmy na przykład:

$$\begin{aligned} S(99) &= 2S\left(\left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor\right) = 2S(49) = 2 \cdot 2S(24) = 2 \cdot 2 \cdot 2S(12) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2S(6) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2S(3) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot S(1) = 2^6 \cdot 1 = 2^6. \end{aligned}$$

Do obliczenia wartości  $S(99)$  wystarczyło znaleźć tylko wartości 6 wyrazów. Ogólnie  $S(n)$  jest największą liczbą całkowitą postaci  $2^k$ , dla której  $2^k \leq n$ .

W tej metodzie przy rekurencji wyznaczamy tylko te elementy, do których rekurencja się odwołuje. W szczególności równanie rekurencyjne rzędu  $k$  dla ciągu  $\{a_n\}$  dane jest przez równość:

$$F(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}) = 0 \quad (1.3.1)$$

dla pewnej funkcji  $F$  oraz przez warunki brzegowe (początkowe) opisane równościami:  $a_0 = r_0, a_1 = r_1, \dots, a_{k-1} = r_{k-1}$  dla pewnych stałych  $r_0, r_1, \dots, r_{k-1}$ . Dla wielu funkcji  $F$  takie równanie jednoznacznie wyznacza ciąg  $\{a_n\}$ .

Równanie  
liniowe

Jeżeli lewa część równania (1.3.1) ma postać:

$$a_{n+k} = t_0 a_n + t_1 a_{n+1} + \dots + t_k a_{n+k-1} + b_n,$$

to dostajemy *równanie liniowe*. Jeżeli  $t_0, \dots, t_k$  są stałymi, to równanie liniowe jest równaniem o stałych współczynnikach, natomiast gdy  $b_n = 0$ , to równanie jest *jednorodne*.

### Przykład 1.3.6

Równanie liniowe o stałych współczynnikach  $a_{n+1} - a_n - c = 0$  ma rozwiązanie ogólne postaci  $cn + b$ , gdzie  $b$  zależy od warunków brzegowych.

### Przykład 1.3.7

Równanie jednorodne o stałych współczynnikach  $a_{n+1} - ca_n = 0$  ma rozwiązanie ogólne postaci  $bc^n$ .

### Przykład 1.3.8

Rozwiążemy równanie  $a_{n+1}^2 - 5a_n = 0$ , gdzie  $a_0 = 2$ . Przekształcamy je do postaci  $a_{n+1} = 5^{1/2} a_n^{1/2}$ . Rozwiązanie otrzymujemy przez rozwinięcie, to znaczy:

$$\begin{aligned} a_n &= 5^{1/2} a_{n-1}^{1/2} = 5^{1/2} \left( 5^{1/2} a_{n-2}^{1/2} \right)^{1/2} = \dots \\ &= 5^{1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + \dots + (1/2)^n} \left( \left( a_0^{1/2} \right)^{1/2} \right)^{1/2} = 5^{1 - 1/2^n} 2^{1/2^n}. \end{aligned}$$

### Przykład 1.3.9

Rozwiążemy równanie liniowe  $(n+1)a_{n+1} - a_n = 1$  przy warunku początkowym  $a_0 = 1$ . Mnożymy wyjściowe równanie przez  $n!$  i dostajemy  $(n+1)!a_{n+1} - n!a_n = n!$ . Podstawiamy  $b_n = n!a_n$  i otrzymujemy równanie  $b_{n+1} - b_n = n!$  dla  $b_0 = 1$ . Stąd:

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + (n-1)! = b_{n-2} + (n-2)! + (n-1)! \\ &= b_0 + 0! + 1! + 2! + \dots + (n-2)! + (n-1)! \\ &= 1 + 0! + 1! + 2! + \dots + (n-1)! \end{aligned}$$

dla  $n > 0$ , co daje także wartość ciągu  $\{a_n\}$ .

Liczby  
Fibonacciego

Liczby Fibonacciego<sup>19</sup>, opisane po raz pierwszy w 1202 roku, są określone przez następujące jednorodne równanie liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach:

$$\begin{aligned}f_0 &= 0, \\f_1 &= 1, \\f_{n+2} &= f_n + f_{n+1} \text{ dla } n \geq 0.\end{aligned}$$

Liczby Fibonacciego często są definiowane dopiero od  $n = 1$ . Wtedy:

$$\begin{aligned}f_1 &= 1, \\f_2 &= 1, \\f_{n+2} &= f_n + f_{n+1} \text{ dla } n \geq 1.\end{aligned}$$

Początkowymi wyrazami ciągu  $\{f_n\}$  są:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Liczby Fibonacciego występują w wielu problemach kombinatorycznych i mają ciekawe własności, których kilka pokażemy w przykładach.

### Przykład 1.3.10

W definiującej równości rekurencyjnej  $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$  zwiększamy wskaźnik  $n$  oraz jednocześnie sprowadzamy prawą stronę do kombinacji liniowej liczb  $f_n$  oraz  $f_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}f_{n+3} &= f_{n+2} + f_{n+1} = f_{n+1} + f_n + f_{n+1} = 2f_{n+1} + f_n, \\f_{n+4} &= f_{n+3} + f_{n+2} = 2f_{n+1} + f_n + f_{n+1} + f_n = 3f_{n+1} + 2f_n, \\f_{n+5} &= f_{n+4} + f_{n+3} = 3f_{n+1} + 2f_n + 2f_{n+1} + f_n = 5f_{n+1} + 3f_n.\end{aligned}$$

Ogólnie:

$$f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n.$$

Biorąc  $k = n$ , dostajemy:

$$f_{2n} = f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_n.$$

Podobnie dla  $k = 2n$  mamy:

$$f_{3n} = f_{2n} f_{n+1} + f_{2n-1} f_n.$$

W szczególności  $f_{kn}$  jest wielokrotnością  $f_n$  dla wszystkich liczb całkowitych  $k$  oraz  $n$ .

Tożsamość  
Cassiniego

**Przykład 1.3.11**

Dla  $n > 0$ :

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n. \quad (1.3.2)$$

Wzór (1.3.2) udowodnił w 1680 roku G. Cassini<sup>6</sup>. Wzór ten jest zwany tożsamością Cassiniego udowodnimy przez indukcję.

Podstawa  $n = 1$ :

$$f_{1+1}f_{1-1} - f_1^2 = f_2f_0 - f_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1.$$

Krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 &= (f_{n+1} + f_n)f_n - f_{n+1}^2 = f_{n+1}f_n + f_n^2 - f_{n+1}^2 \\ &= f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_{n+1}f_n = f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_{n+1}(f_{n+1} - f_{n-1}) \\ &= f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1} = -(f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

**Przykład 1.3.12**

Pokażemy przez indukcję, że dla  $n \geq 1$  zachodzi wzór:

$$\sum_{j=1}^n f_j = f_{n+2} - 1.$$

Podstawa: dla  $n = 1$  mamy  $f_1 = 1 = 2 - 1 = f_3 - 1$ . Krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} f_j &= \sum_{j=1}^n f_j + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} \\ &= f_{n+2} + f_{n+1} - 1 = f_{n+3} - 1. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy równanie rekurencyjne:

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}.$$

Równanie cha-  
rakterystyczne

Założmy, że ma ono rozwiązanie  $a_n = x^n$ . Po podstawieniu przyjmuje postać:

$$x^2 = Ax + B,$$

którą nazywa się równaniem charakterystycznym równania rekurencyjnego. Jeżeli to równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1$  oraz  $x_2$ , to równanie rekurencyjne ma rozwiązanie ogólne postaci:

$$a_n = C_1x_1^n + C_2x_2^n.$$

Gdy  $x_1 = x_2$ , to rozwiązanie ogólne ma postać:

$$a_n = (C_1 + C_2n)x_1^n.$$

Stałe  $C_1$  oraz  $C_2$  zależą od warunków początkowych nałożonych na równanie rekurencyjne.

**Przykład 1.3.13**

Rozwiążemy równanie rekurencyjne  $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$  dla  $n \geq 3$  z warunkami początkowymi  $a_1 = 5$  oraz  $a_2 = 13$ . Równanie charakterystyczne ma postać  $x^2 = 2x + 3$ . Ponieważ  $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ , więc pierwiastkami równania charakterystycznego są  $x_1 = -1$  oraz  $x_2 = 3$ . Mamy:

$$\begin{cases} a_1 &= C_1(-1)^1 + C_23^1, \\ a_2 &= C_1(-1)^2 + C_23^2, \end{cases}$$

to znaczy:

$$\begin{cases} 5 &= -C_1 + 3C_2, \\ 13 &= C_1 + 9C_2. \end{cases}$$

Stąd:

$$\begin{cases} C_1 &= -\frac{1}{2}, \\ C_2 &= \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Rozwiązaniem ogólnym naszego równania rekurencyjnego jest więc:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1} + 3^{n+1}}{2}.$$

**Przykład 1.3.14**

*Równanie  
Fibonacciego*

Równanie Fibonacciego jest szczególnym przypadkiem jednorodnego liniowego równania rekurencyjnego o stałych współczynnikach, którego ogólna postać jest następująca:

$$x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \dots + a_kx_{n-k},$$

gdzie współczynniki  $a_i$  są niezależne od  $n$ , natomiast  $x_1, x_2, \dots, x_k$  są dane. Szukamy rozwiązania postaci  $f_n = cr^n$  ze stałymi  $c$  oraz  $r$ . Po podstawieniu ich do równania rekurencyjnego Fibonacciego otrzymujemy:

$$cr^{n+2} = cr^{n+1} + cr^n,$$

czyli

$$cr^n(r^2 - r - 1) = 0.$$

Oznacza to, że  $f_n = cr^n$  jest rozwiązaniem wtedy, gdy  $c = 0$  lub  $r = 0$ , a stąd  $f_n = 0$  dla wszystkich  $n$  lub  $r^2 - r - 1 = 0$ . Wobec tego  $r = (1 + \sqrt{5})/2$  lub  $r = (1 - \sqrt{5})/2$  dla dowolnej wartości stałej  $c$ .

*Złoty podział*

Liczba  $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$  jest nazywana złotym podziałem, ponieważ od czasów antycznych prostokąt o bokach 1 i  $(1 + \sqrt{5})/2$  uważano za figurę o najdoskonalszych proporcjach.

Suma dwóch rozwiązań jednorodnego liniowego równania rekurencyjnego jest także rozwiązaniem i można wykazać, że najbardziej ogólnym rozwiązaniem równania Fibonacciego jest:

$$f_n = c \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c' \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad (1.3.3)$$

gdzie stałe  $c$  oraz  $c'$  są wyznaczane z warunków początkowych. Przyjmując  $f_0 = 0$  oraz  $f_1 = 1$ , otrzymujemy równania liniowe  $f_0 = c + c' = 0$ ,  $f_1 = c \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c' \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$ , co daje  $c = c' = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Dla wszystkich warunków początkowych dających  $c = 0$  ciągi spełniające równanie Fibonacciego rosną tak jak  $c \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$ . Składniki postaci  $c' \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$  mają niewielkie znaczenie tak bezwzględne, jak i relatywne, ponieważ  $\frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}) < 1 < \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$ . Zatem dla warunków początkowych  $f_0 = 0$  i  $f_1 = 1$  liczby Fibonacciego rosną dla dużych  $n$  tak jak  $f_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$ .

Uogólniony ciąg liczb Fibonacciego:

$$f_n = f_{n-r} + f_{n-s} \pmod{m}, n \geq r, r \geq s \geq 1 \quad (1.3.4)$$

został wykorzystany w generatorach Fibonacciego liczb losowych. Dla kompletnego zdefiniowania uogólnionych liczb Fibonacciego potrzebnych jest  $r$  pierwszych wyrazów ciągu.

### Przykład 1.3.15

Generator liczb losowych postaci:

$$x_n = x_{n-5} + x_{n-17} \pmod{2^{32}}. \quad (1.3.5)$$

Okres generatora liczb losowych  $x_n$  to najmniejsza liczba  $m$  taka, że  $x_{n+m} = x_n$ . Generator (1.3.5) ma okres

$$(2^{17} - 1) 2^{29} = 70368207306752 \approx 7.03 \cdot 10^{13}.$$

Dla porównania: rok ma  $1892160000000 \approx 1.89 \cdot 10^{12}$  milisekund.

## 1.4. Zadania

**1.1.** Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ :

$$1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

**1.2.** Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ :

$$1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2 (2n^2 - 1).$$

**1.3.** Pokazać, że  $n! > 2^n$  dla każdego  $n \geq 4$ .

**1.4.** Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 3$ :

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

**1.5.** Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$ :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

**1.6.** Pokazać, że dla  $n > 1$  liczby harmoniczne spełniają zależność rekurencyjną:

$$H_n = \frac{1}{n} (H_{n-1} + H_{n-2} + \cdots + H_1) + 1.$$

**1.7.** Udowodnić nierówność Weierstrassa<sup>74</sup>:

Dla ciągu liczb dodatnich  $a_1, a_2, \dots, a_n, n \geq 2$

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) > 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

**1.8.** Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n \geq 1$ :

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

**1.9.** Udowodnić nierówność Bernoulliego<sup>4</sup>:

Dla dowolnej liczby naturalnej  $n \geq 1$  i dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x > -1$ :

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

**1.10.** Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $11^{n+1} + 12^{2n-1}$  jest podzielna przez 133.

**1.11.** Wyznaczyć wszystkie nieizomorficzne porządki częściowe na zbiorze trzelementowym.

**1.12.** Oznaczmy  $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$ . W zbiorze  $[N]$  wprowadzimy relację częściowego porządku w następujący sposób:  $n \prec m$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $m$  jest podzielne przez  $n, n < m$ . Wyznaczyć elementy minimalne i maksymalne dla danego  $N$ . Czy w zbiorze  $[N]$  istnieją elementy najmniejszy i największy?

**1.13\*\*.** Pokazać, że liczba naturalna  $n$  ma nieparzystą liczbę dzielników (włączając 1 i  $n$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sqrt{n}$  jest liczbą całkowitą.

**1.14.** Pokazać, że:

$$NWD(f_m, f_n) = f_{NWD(m, n)}.$$

**1.15\*\*.** Pokazać, że każda liczba naturalna  $n > 0$  ma jednoznaczne przedstawienie w postaci:

$$n = f_{i_1} + f_{i_2} + \dots + f_{i_k},$$

gdzie  $i_{j+1} \geq i_j + 2$  oraz  $i_1 \geq 2$ .

**1.16.** Liczby Lucasa<sup>43</sup> określone są w następujący sposób:

$$l_1 = 2,$$

$$l_2 = 1,$$

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2} \text{ dla } n \geq 3.$$

Udowodnić, że liczby Lucasa można przedstawić jako sumy liczb Fibonacciego  $l_n = f_n + f_{n-2}$  dla  $n \geq 2$ .

**1.17.** Pokazać, że:

$$\text{a) } f_{2n} = f_n l_{n+1},$$

$$\text{b) } l_{2n} = l_n^2 - 2(-1)^n,$$

$$\text{c) } l_0 + l_1 + \dots + l_n = l_{n+2} - 1,$$

$$\text{d) } 5f_n = l_{n-1} + l_{n+1}.$$

**1.18.** Cofając się w rekursji, wyznaczyć  $s_5$  dla ciągu zdefiniowanego następująco:

$$(1) \quad s_0 = 1,$$

$$(2) \quad s_n = 2^{n-1} + s_{n-1} \text{ dla } n \geq 1.$$

**1.19.** Dla ciągu zdefiniowanego w przykładzie 1.3.5 obliczyć  $S(77)$ .

**1.20.** Wyznaczyć  $S(45)$ , wiedząc, że:

$$(1) \quad S(1) = 1,$$

$$(2) \quad S(n) = 3S\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \text{ dla } n \geq 2.$$

**1.21.** Wyznaczyć  $S(142)$ , wiedząc, że:

- (1)  $S(1) = 3$ ,
- (2)  $S(n) = 3S(\lceil \frac{n}{3} \rceil)$  dla  $n \geq 2$ .

**1.22.** Rozwiązać równania rekurencyjne z danymi warunkami początkowymi:

- (a)  $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$  dla  $a_0 = 1, a_1 = -3$ ,
- (b)  $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$  dla  $a_1 = 1, a_2 = 17$ ,
- (c)  $a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}$  dla  $a_1 = -5, a_2 = 8$ ,
- (d)  $a_n = -4a_{n-1} - 3a_{n-2}$  dla  $a_1 = -1, a_2 = 5$ ,
- (e)  $a_n = 7a_{n-1} + 8a_{n-2}$  dla  $a_1 = 3, a_2 = 5$ .

## 2. Rozmieszczania i permutacje

### 2.1. Funkcje i rozmieszczania

#### *Relacja*

Przypomnijmy, że relacja jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów. Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  to relacja  $R \subseteq X \times Y$  o tej własności, że dla każdego  $x \in X$  istnieje dokładnie jedna para postaci  $(x, y = f(x)) \in X \times Y$ . Zbiór  $X$  nazywamy dziedziną funkcji, a zbiór  $Y$  przeciwdziedziną funkcji. Dla dowolnych zbiorów  $A \subseteq X$  i  $B \subseteq Y$  określamy obraz oraz przeciwobraz zbioru. Obraz zbioru  $A$  to zbiór wszystkich wartości należących do przeciwdziedziny przyjmowanych przez funkcję dla każdego elementu danego podzbioru tej dziedziny, to znaczy  $f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A \ y = f(x)\}$ . Przeciwobraz zbioru  $B$  to zbiór wszystkich elementów dziedziny, które są odwzorowane na elementy danego zbioru, to znaczy  $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ .

Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  jest „na” (jest surjekcją), jeśli  $f(X) = Y$ . Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  jest *różnowartościowa* (jest wzajemnie jednoznaczna, jest iniekcją), jeśli  $\forall a, b \in X \ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ . Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  jest *bijekcją*, jeśli jest różnowartościowa i „na”.

Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie: na ile sposobów można rozmieścić pewną liczbę obiektów w określonej liczbie pudełek, tak aby spełnione były zadane dodatkowe warunki? Formalny opis tego problemu to klasyczne zadanie kombinatoryki, które brzmi: dane są dwa zbiory skończone  $X$  oraz  $Y$  o mocach, czyli liczbach elementów odpowiednio:  $|X| = m$  i  $|Y| = n$ . Ile jest funkcji  $f : X \rightarrow Y$  spełniających zadane ograniczenia? Problem ten może mieć na przykład następujące interpretacje:

1.  $X$  – zbiór obiektów,  $Y$  – zbiór pudełek; funkcja  $f : X \rightarrow Y$  określa pewne rozmieszczenie obiektów w pudełkach przez wskazanie dla każdego obiektu  $x \in X$  pudełka  $f(x) \in Y$ , w którym jest umieszczony;

2.  $X$  – zbiór obiektów,  $Y$  – zbiór kolorów; funkcja  $f : X \rightarrow Y$  określa sposób kolorowania obiektów przez podanie dla każdego obiektu  $x \in X$  koloru  $f(x) \in Y$ .

Niech  $X = \{1, 2, \dots, m\}$  i  $Y = \{1, 2, \dots, n\}$ . W najprostszej sytuacji nie nakładamy żadnych dodatkowych warunków, rozmieszczenie obiektów w pudełkach może być opisane funkcją ze zbioru wszystkich funkcji z  $X$  w  $Y$ .

Zbiory  
w pudełkach

### Twierdzenie 2.1.1

Jeśli  $|X| = m$  oraz  $|Y| = n$ , to liczba wszystkich funkcji  $f : X \rightarrow Y$  jest równa  $n^m$ .

*Dowód.* Oznaczmy  $X = \{1, 2, \dots, m\}$ . Funkcje  $f : X \rightarrow Y$  są ciągami długości  $m$  o wyrazach ze zbioru  $Y$ . Każdy wyraz można wybrać na  $n$  sposobów, wszystkich ciągów jest więc  $n^m$ .  $\square$

Potęgi  
kroczące

Podamy teraz definicje potęg kroczących (ubywających i przyrastających).

Dla dowolnych  $m, n \in \mathbb{N}$ :

$$n^{\underline{m}} = n(n-1) \dots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad (2.1.1)$$

gdy  $m \leq n$ , oraz

$$n^{\overline{m}} = n(n+1) \dots (n+m-1) = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!}. \quad (2.1.2)$$

Zauważmy, że  $n^{\underline{n}} = n!$  oraz  $1^{\overline{m}} = m!$ .

Silnia dolna  
i górna

Dodatkowo przyjmuje się  $n^{\underline{0}} = n^{\overline{0}} = 1$  oraz  $n^{\underline{m}} = 0$  dla  $m > n$ . Oznaczenie  $n^{\overline{m}}$  wprowadził A. Capelli w 1893 roku, a  $n^{\underline{m}}$  L. Toscano w 1939 roku.  $n^{\underline{m}}$  nazywa się potęgą ubywającą lub silnią dolną (ang. *falling factorial*). Symbol  $n^{\underline{m}}$  czyta się „ $n$  do  $m$ -tej ubywającej”.  $n^{\overline{m}}$  nazywa się potęgą przyrastającą lub silnią górną (ang. *rising factorial*). Symbol  $n^{\overline{m}}$  czyta się „ $n$  do  $m$ -tej przyrastającej”. Ten sposób czytania potęg kroczących zaproponowali R. Graham, D. Knuth i O. Patashnik w swojej książce [9] w roku 1988.

**Twierdzenie 2.1.2**

*Prawdziwe są następujące tożsamości:*

$$n^{\underline{m}} = n^{\underline{m-1}}(n - m + 1), \quad (2.1.3)$$

$$n^{\underline{m}} = n(n - 1)^{\underline{m-1}}, \quad (2.1.4)$$

$$n^{\overline{m}} = n^{\overline{m-1}}(n + m - 1), \quad (2.1.5)$$

$$n^{\overline{m}} = n(n + 1)^{\overline{m-1}}, \quad (2.1.6)$$

$$n^{\overline{m}} = (n + m - 1)^{\overline{m}}, \quad (2.1.7)$$

$$n^{\underline{m+l}} = n^{\underline{m}}(n - m)^{\underline{l}}, l \in \mathbb{N}. \quad (2.1.8)$$

**Uwaga.** We wzorach (2.1.1) oraz (2.1.2) można zamiast  $n$  podstawić liczbę rzeczywistą  $x$ , otrzymując definicje symboli  $x^{\underline{m}}$  i  $x^{\overline{m}}$ . Wzory (2.1.3) i (2.1.7) pozostają prawdziwe i przyjmują postać:

$$x^{\underline{m}} = x^{\underline{m-1}}(x - m + 1), \quad (2.1.9)$$

$$x^{\overline{m}} = (x + m - 1)^{\overline{m}}, \quad (2.1.10)$$

gdzie  $x^{\overline{0}} = x^{\underline{0}} = 1$ .

Jeśli nie nakładamy żadnych dodatkowych warunków, to w jednym pudełku może się znaleźć jeden lub więcej obiektów, ale także niektóre pudełka mogą pozostać puste. Załóżmy teraz, że w każdym pudełku może się znaleźć nie więcej niż jeden obiekt, czyli funkcja przyporządkowująca pudełko obiektom jest różnowartościowa.

**Twierdzenie 2.1.3**

*Liczba funkcji różnowartościowych*

*Jeśli  $|X| = m$  oraz  $|Y| = n$ , to liczba funkcji różnowartościowych  $f : X \rightarrow Y$  jest dla  $m \leq n$  równa  $n^{\underline{m}}$ .*

*Dowód.* Niech  $X = \{1, 2, \dots, m\}$  oraz  $m \leq n$ . Pierwszy wyraz ciągu można wybrać na  $n$  sposobów, drugi na  $n - 1$ , a ogólnie  $i$ -ty wyraz można wybrać na  $m - (i - 1) = m - i + 1$  sposobów, co daje wzór (2.1.1). Dla  $m > n$  nie ma funkcji  $f : X \rightarrow Y$  różnowartościowych.  $\square$

Powyższe twierdzenie opisuje zadanie znalezienia liczby rozmieszczeń  $m$  elementów w  $n$  pudełkach, gdy w każdym pudełku można umieścić co najwyżej jeden element.

Jeśli  $m = n$ , to każda funkcja różnowartościowa  $f : X \rightarrow Y$  jest wzajemnie jednoznaczny odwzorowaniem zbioru  $X$  na zbiór  $Y$ . Oczy-

wiecie liczba tych funkcji jest równa  $n^n = n!$ , co wyjaśnimy dalej w twierdzeniu 2.2.1.

*Ciągi  
w pudełkach*

Zagadnieniem podobnym do problemu rozwiązanego w twierdzeniu 2.1.3 jest rozmieszczenie  $m$  elementów w  $n$  pudełkach, przy czym każde pudełko zawiera ciąg elementów (pudełka mogą być też puste). Dwa rozmieszczenia są identyczne, gdy te same pudełka mają te same ciągi elementów. Rozmieszczenia tego typu nazywa się rozmieszczeniami uporządkowanymi  $m$  elementów w  $n$  pudełkach. Liczbę wszystkich możliwych takich rozmieszczeń podaje poniższe twierdzenie.

#### **Twierdzenie 2.1.4**

*Liczba rozmieszczeń uporządkowanych  $m$  elementów w  $n$  pudełkach jest równa  $n^m$ .*

*Dowód.* Niech  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Element  $x_1$  można rozmieścić na  $n$  sposobów – tyle, ile jest pudełek. Element  $x_2$  można umieścić na  $n - 1$  sposobów w  $n - 1$  pustych pudełkach oraz na dwa sposoby w pudełku zawierającym  $x_1$  – otrzymamy wówczas ciąg  $(x_1, x_2)$  lub  $(x_2, x_1)$ . Oznaczmy przez  $s_i$  liczbę elementów w pudełku  $i$ -tym po rozmieszczeniu elementów  $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ . Element  $x_k$  można teraz rozmieścić w  $i$ -tym pudełku na  $s_i + 1$  sposobów, czyli w sumie na:

$$\sum_{i=1}^n (s_i + 1) = m + \sum_{i=1}^n s_i = m + k - 1$$

sposobów. Stąd otrzymujemy wzór (2.1.2). □

## 2.2. Permutacje

*Permutacje* są pojęciem dość mocno związanym z rozmieszczeniem obiektów lub wartości. Sposób określania liczby permutacji znany był już w XII wieku. Dokładnej analizy dokonał dopiero L. Lagrange<sup>39</sup> w 1770 roku podczas prac nad wielomianami.

*Permutacja*

Każde wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie  $f : X \rightarrow X$  (bijekcję) nazywamy *permutacją* zbioru skończonego  $X$ .

*Zapis  
permutacji*

Zapisując permutację w tablicy, w górnym wierszu umieszczamy elementy zbioru  $X$  w dowolnej kolejności, a w dolnym wierszu pod elementem  $x \in X$  wpisujemy  $f(x)$ . Jeśli uporządkujemy elementy w górnym wierszu tablicy, to danej permutacji odpowiada jednoznacznie wektor z dolnego wiersza, składający się z elementów zbioru  $X$ .

Zatem dowolny wektor  $n$ -elementowy zawierający różne elementy zbioru  $X$  (dla  $|X| = n$ ) możemy także nazywać permutacją zbioru  $X$ . Przyjmujemy dla uproszczenia, że  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Przez  $S_n$  oznaczamy zbiór wszystkich permutacji zbioru  $X$ . Każdy element  $f \in S_n$  identyfikujemy z wektorem  $(a_1, \dots, a_n)$ , gdzie  $a_i = f(i)$ , lub zapisujemy w postaci:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

### Przykład 2.2.1

Dla  $X = \{a, b, c, d\}$  określamy permutację w sposób następujący:

$$f(a) = d, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = b.$$

Permutację można też zapisać w postaci tablicy:

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{pmatrix}.$$

Korzystając z twierdzenia 2.1.3, możemy podać liczbę permutacji zbioru o skończonej liczbie elementów.

### Twierdzenie 2.2.1

Liczba permutacji zbioru  $n$ -elementowego jest równa  $n^n = n!$ .

*Wzór Stirlinga* Ponieważ  $n!$  rośnie bardzo szybko, to użyteczny jest wzór asymptotyczny Stirlinga<sup>67</sup>:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + o(1)) \quad (2.2.1)$$

i jego udoskonalenie – bardzo dokładne oszacowanie zwane wzorem Robbinsa<sup>62</sup>:

$$n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{1/(12n+1)} < n! < n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{1/(12n)} \quad (2.2.2)$$

(patrz zadania 2.24 i 2.25).

Do dalszych rozważań o permutacjach potrzebna będzie definicja grupy. Teoria grup jest jednym z ciekawszych i ważniejszych działów matematyki. Własności grup wykorzystamy również w dalszych częściach książki.

*Grupą* nazywamy zbiór  $X$  z określonym w tym zbiorze działaniem dwuargumentowym  $\circ$ , to znaczy parę  $(X, \circ)$ , spełniającą warunki:

(1) działanie  $\circ$  jest łączne, to znaczy:

$$\forall_{a,b,c \in X} (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

- (2) istnieje element neutralny  $e$  działania  $\circ$ , to znaczy:

$$\exists_{e \in X} \forall_{a \in X} e \circ a = a \circ e = a,$$

- (3) dla dowolnego elementu  $a$  zbioru  $X$  istnieje element do niego odwrotny  $b = a^{-1}$ , to znaczy:

$$\forall_{a \in X} \exists_{b \in X} a \circ b = b \circ a = e.$$

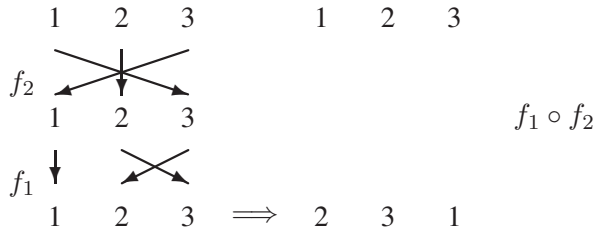
Jeżeli działanie  $\circ$  jest przemienne, to znaczy  $a \circ b = b \circ a$ , to grupę  $(X, \circ)$  nazywa się grupą abelową (od nazwiska N. Abela<sup>1</sup>) lub przemianą.

*Złożeniem permutacji  $f$  oraz  $g$  nazywamy permutację  $f \circ g$  taką, że  $(f \circ g)(i) = f(g(i))$ . Jest to po prostu złożenie, czyli superpozycja funkcji, gdzie  $g$  jest funkcją wewnętrzną.*

*Złożenie  
permutacji*

### Przykład 2.2.2

Niech  $X = \{1, 2, 3\}$  oraz  $f_1 = (1, 3, 2)$ ,  $f_2 = (3, 2, 1)$ . Wtedy  $f_1 \circ f_2 = (2, 3, 1)$  – patrz rysunek 2.1.



Rysunek 2.1. Złożenie permutacji  $f_1 \circ f_2$

### Przykład 2.2.3

Niech:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wtedy złożenie permutacji  $f$  oraz  $g$  to:

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Permutacja  
identyczno-  
ściowa*

Permutację:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

nazywamy *permutacją identycznościową*.

Permutacja  $e \in S_n$  jest elementem neutralnym dla operacji złożenia, to znaczy  $\forall_{f \in S_n} e \circ f = f \circ e = f$ .

Permutacją odwrotną do  $f \in S_n$  nazywamy permutację  $f^{-1}$  taką, że  $f^{-1} \circ f = e$ . Jeśli  $f = \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots \\ \cdots & j & \cdots \end{pmatrix}$ , to  $f^{-1} = \begin{pmatrix} \cdots & j & \cdots \\ \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ .

Dla każdej permutacji  $f$  zachodzi  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$ .

Zbiór wszystkich permutacji  $n$ -elementowego zbioru  $X$  oznacza się przez  $S_n$ .  $(S_n, \circ)$  tworzy grupę. Grupy permutacji okazały się szczególnie ważne przy badaniu rozwiązywalności równań algebraicznych. M. Rejewski<sup>61</sup>, J. Różycki<sup>64</sup> i H. Zygałski<sup>77</sup> wykorzystali teorię permutacji do złamania szyfru Enigmy.

Niech  $f : X \rightarrow X$  będzie permutacją zbioru  $X$ . Załóżmy, że istnieje podział zbioru  $X$  na rozłączne części  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , to znaczy:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$$

taki, że w każdym zbiorze  $X_j$ ,  $x \in X_j \implies f(x) \in X_j$ . Żadnego z  $X_j$  nie można już podzielić na dwie niepuste części o powyższej własności. Wtedy  $X$  można uporządkować w taki sposób, że każdy  $X_j$  składa się z kolejnych elementów,  $X_j = \{x_{j1}, \dots, x_{jm_j}\}$  oraz

$$\begin{aligned} f(x_{j1}) &= x_{j2}, f(x_{j2}) = x_{j3}, \dots, f(x_{jm_j-1}) \\ &= x_{j+m_j}, f(x_{j+m_j}) = x_{j1}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Oczywiście funkcja  $f$  ograniczona do zbioru  $X_j$  też jest permutacją.

*Rozkład  
permutacji na  
cykle*

Każdy taki podzbiór (uporządkowany)  $X_j \subseteq X$  nazywa się *cyklem*, a przedstawienie  $X$  w postaci sumy cykli nazywa się *rozkładem permutacji na cykle*. Moc zbioru  $X_j$  nazywa się *długością cyklu*  $X_j$ .

Rozkład permutacji  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  na cykle oznacza się:

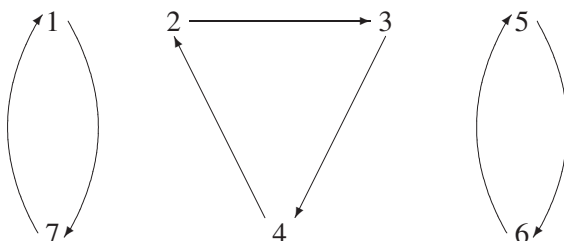
$$[x_1, \dots, x_{m_1}] [x_{m_1+1}, \dots, x_{m_1+m_2}] \dots [x_{n-m_k}, \dots, x_n],$$

gdzie  $m_j$  jest długością  $j$ -tego cyklu. Permutacja  $f$  jest typu  $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$ , jeśli w rozkładzie na cykle ma  $\lambda_i$  cykli długości  $i$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Typ ten zapisuje się symbolicznie  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ , opuszczając  $i^{\lambda_i}$ , gdy  $\lambda_i = 0$ . Permutację typu  $n^1 = 1^0 2^0 \dots (n-1)^0 n^1$ , czyli mającą jeden cykl długości  $n$ , nazywa się *cykliczną*.

*Permutacja  
cykliczna*

**Przykład 2.2.4**

Graficznie rozkład permutacji na cykle można przedstawić jak na rysunku 2.2. Pokazano na nim rozkład permutacji  $(7, 3, 4, 2, 6, 5, 1)$  na cykle  $[1, 7][2, 3, 4][5, 6]$ . Permutacja ta jest typu  $2^2 3^1$ .



Rysunek 2.2. Rozkład permutacji na cykle

*Rząd  
permutacji*

Najmniejszą liczbę naturalną  $k$  taką, że:

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ razy}} = e, \quad (2.2.4)$$

gdzie  $e$  jest permutacją identycznościową, nazywamy *rzędem* permutacji. Rząd permutacji cyklicznej zbioru  $n$ -elementowego jest równy  $n$ . Stąd też otrzymujemy, że rząd permutacji jest najmniejszą wspólną wielokrotnością (NWW) długości cykli.

**Przykład 2.2.5**

Rząd permutacji

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

wynosi 2, a rząd permutacji

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

jest równy 3. Rząd permutacji z przykładu 2.2.4 jest równy 6. Kolejne iteracje wzoru (2.2.4) dla tej permutacji wyglądają następująco:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

Permutacje są wykorzystywane w dwóch ważnych charakterystykach macierzy: permanencie i wyznaczniku.

*Permanent* *Permanentem* macierzy kwadratowej  $A = [a_{ij}]$  wymiaru  $n \times n$  nazywamy liczbę określoną wzorem:

$$\det(A) = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \prod_{j=1}^n a_{ji_j}, \quad (2.2.5)$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich permutacjach  $(i_1, \dots, i_n)$  ciągu  $(1, \dots, n)$ .

*Inwersja* Para  $(x_i, x_j)$ ,  $i < j$ , jest *inwersją* permutacji  $(x_1, \dots, x_n)$ , jeśli zachodzi relacja  $x_j < x_i$ . Dla dowolnej permutacji  $f$  przez  $I(f)$  oznacza się liczbę jej inwersji. Znak permutacji definiuje się wzorem:

$$\operatorname{sgn}(f) = (-1)^{I(f)}.$$

*Znak permutacji* Permutacja jest *parzysta*, gdy  $\operatorname{sgn}(f) = 1$ , a w przeciwnym przypadku jest *nieparzysta*. Permutacja tożsamościowa  $e$  jest parzysta.

### Przykład 2.2.6

Permutacja

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ma inwersje  $(5, 3)$ ,  $(5, 2)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(2, 1)$ . Zatem  $I(f) = 7$ , czyli permutacja jest nieparzysta, ponieważ  $\operatorname{sgn}(f) = (-1)^7 = -1$ .

Permutacja

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

ma inwersje  $(3, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(5, 2)$ . Zatem  $I(f) = 4$ , czyli permutacja jest parzysta, ponieważ  $\operatorname{sgn}(f) = (-1)^4 = 1$ .

### Twierdzenie 2.2.2

*Złożenie permutacji tej samej parzystości jest permutacją parzystą, a permutacji różnej parzystości jest permutacją nieparzystą.*

*Transpozycja* *Transpozycją* nazywa się permutację polegającą na zamianie tylko dwóch elementów, powiedzmy elementów  $x_i$  oraz  $x_j$ , czyli permutację postaci  $(x_j, x_i)$ , gdy  $i < j$ , a zbiór permutowany  $X = (1, 2, \dots, n)$  jest ustalony.

### Przykład 2.2.7

Permutacja

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = [3, 5]$$

jest transpozycją – zamienione są tylko elementy 3 oraz 5.

Wyznacznik

Znak permutacji jest wykorzystany w znanej „permutacyjnej” definicji wyznacznika  $\det(A)$  macierzy kwadratowej  $A = [a_{ij}]$  wymiaru  $n \times n$ :

$$\det(A) = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) \prod_{j=1}^n a_{ji_j}, \quad (2.2.6)$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich permutacjach  $(i_1, \dots, i_n)$  ciągu  $(1, \dots, n)$ . Inna definicja wyznacznika podana jest w dodatku A.3. Łatwo dostrzec podobieństwo powyższego wzoru do definicji permanentu określonego wzorem (2.2.5), gdzie jednak nie wykorzystuje się znaku permutacji.

### Lemat 2.2.1

*Dowolną permutację  $f$  można przedstawić w postaci złożenia  $I(f)$  transpozycji sąsiednich elementów.*

*Dowód.* Jeżeli  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  jest permutacją oraz  $t = (i, i+1)$ , to złożenie  $f \circ t$  jest postaci:

$$(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \dots, a_n).$$

Oznaczmy przez  $r_i$  liczbę inwersji wprowadzanych przez element  $i$ :

$$r_i = |\{j : j < i \wedge a_j > a_i\}|.$$

Łatwo zauważyć, że w  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  możemy zapisać element  $a_{r_1+1} = 1$  na pierwszej pozycji, dokonując  $r_1$  transpozycji sąsiednich elementów, następnie element 2 sprowadzić na drugą pozycję, dokonując  $r_2$  transpozycji sąsiednich elementów, i tak dalej. Ostatecznie, po  $r_1 + \dots + r_n = I(f)$  krokach, otrzymujemy ciąg  $(1, 2, \dots, n)$ . Oznacza to, że  $f \circ t_1 \circ \dots \circ t_{I(f)} = e$ , gdzie  $t_1, \dots, t_{I(f)}$  są pewnymi transpozycjami sąsiednich elementów. Zatem:

$$f = (t_1 \circ \dots \circ t_{I(f)})^{-1} = t_{I(f)}^{-1} \circ \dots \circ t_1^{-1},$$

co kończy dowód lematu, gdyż  $t^{-1} = t$  dla dowolnej transpozycji  $t$ .  $\square$

### Przykład 2.2.8

Permutacja

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

ma 4 inwersje, czyli  $I(f) = 4$ , i rozkład na transpozycje:

$$f = [2, 3] \circ [3, 4] \circ [4, 5] \circ [1, 2].$$

**Lemat 2.2.2**

Jeśli permutacja  $f$  jest cyklem długości  $k$ , to jej znak wyraża się wzorem  $\operatorname{sgn}(f) = (-1)^{k-1}$ .

**Przykład 2.2.9**

Permutacja

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

ma rozkład na rozłączne cykle:

$$f = (1, 7, 6, 3) \circ (2, 5) \circ (4) \circ (8, 9).$$

Znaki poszczególnych cykli są następujące:

$$\operatorname{sgn}((1, 7, 6, 3)) = (-1)^3 = -1,$$

$$\operatorname{sgn}((2, 5)) = (-1)^1 = -1,$$

$$\operatorname{sgn}((4)) = (-1)^0 = 1,$$

$$\operatorname{sgn}((8, 9)) = (-1)^1 = -1.$$

Zatem znak permutacji  $\operatorname{sgn}(f) = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = -1$ , czyli permutacja jest nieparzysta.

**Przykład 2.2.10**

Niech  $f = (3, 2, 1)$ . Łatwo spostrzec, że liczba inwersji  $I(f) = 3$ . Permutację tę można przedstawić jako złożenie trzech transpozycji, a mianowicie:

$$f = (2, 1) \circ (3, 2) \circ (2, 1).$$

Należy pamiętać, że permutacja stojąca z prawej strony ciągu złożań wykonywana jest jako pierwsza, a stojąca z lewej strony – jako ostatnia. Oznacza to, że najpierw zamieniamy element pierwszy z drugim, otrzymując permutację  $(2, 1, 3)$ , potem zamieniamy element drugi z trzecim, otrzymując  $(2, 3, 1)$ , a na końcu zamieniamy znów element pierwszy z drugim, otrzymując  $(3, 2, 1)$ .

**Lemat 2.2.3**

Jeśli permutacja  $f$  jest typu  $1^{\lambda_1} \dots n^{\lambda_n}$ , to jej znak wyraża się wzorem:

$$\operatorname{sgn}(f) = (-1)^{\sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_{2j}}.$$

**Przykład 2.2.11**

Permutacja z przykładu 2.2.9 jest typu  $1^1 2^2 4^1$ . Zatem:

$$\operatorname{sgn}(f) = (-1)^{\sum_{j=1}^4 \lambda_{2j}} = (-1)^{\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \lambda_8} = (-1)^{2+1} = -1,$$

czyli permutacja jest nieparzysta.

Poniższe twierdzenie pochodzące od Cauchy'ego<sup>8</sup> opisuje liczbę permutacji danego typu.

### Twierdzenie 2.2.3

Liczba permutacji typu  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$  zbioru  $n$ -elementowego jest równa

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!}.$$

Znormalizowany zapis permutacji

*Dowód.* Zapis permutacji  $f$  typu  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$  jest znormalizowany, gdy jest postaci:

$$f = [a_0^{(1)} a_1^{(1)} \dots a_{n_1-1}^{(1)}] \dots [a_0^{(k)} a_1^{(k)} \dots a_{n_k-1}^{(k)}],$$

gdzie występuje kolejno  $\lambda_1$  cykli długości 1,  $\lambda_2$  cykli długości 2 i tak dalej. Porządek, w jakim występują cykle długości  $i$ , można zmieniać na  $\lambda_i!$  sposobów. Każdy taki cykl można przesuwając cyklicznie na  $i$  sposobów. Stąd każda permutacja typu  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$  jest określona przez  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!$  zapisów znormalizowanych.  $\square$

## 2.3. Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju

Liczby Stirlinga<sup>67</sup> pierwszego i drugiego rodzaju zostały wprowadzone przez J. Stirlinga w 1730 roku w pracy *Methodus Differentialis*.

Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju definiuje się jako współczynniki  $s(n, k)$  przy kolejnych potęgach  $x$  wielomianu  $x^{\overline{n}}$ , określonego wzorem:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k \quad (2.3.1)$$

lub równoważnie:

$$x^n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^{\overline{k}}. \quad (2.3.2)$$

### Twierdzenie 2.3.1

Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju spełniają wzór rekurencyjny:

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1) s(n-1, k) \quad (2.3.3)$$

dla  $0 < k < n$  oraz  $s(n, n) = 1$  dla  $n \geq 0$  i  $s(n, 0) = 0$  dla  $n > 0$ .

*Dowód.* Niech  $0 < k < n$ . Wtedy  $x^n = x^{n-1}(x - n + 1)$ , skąd:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k &= (x - n + 1) \sum_{k=1}^{n-1} s(n-1, k) x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s(n-1, k-1) x^k \\ &\quad - (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1, k) x^k. \end{aligned}$$

Wzór (2.3.3) otrzymujemy przez porównanie współczynników przy  $x^k$ .  $\square$

*Cykliczne  
liczby Stirlinga*

Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju  $s(n, k)$  mogą być ujemne. Z tego powodu dodatkowo rozważa się ich wartość bezwzględną. Takie liczby nazywane są nieoznakowanymi liczbami Stirlinga pierwszego rodzaju i oznaczane  $c(n, k)$  (patrz na przykład [14]) lub częściej cyklicznymi liczbami Stirlinga oznaczanymi  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  (patrz na przykład [9]), to znaczy:

$$|s(n, k)| = c(n, k) = \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]. \quad (2.3.4)$$

### Twierdzenie 2.3.2

Wartość bezwzględna liczby Stirlinga pierwszego rodzaju  $|s(n, k)| = \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  jest równa liczbie permutacji zbioru  $n$ -elementowego, która ma rozkład na  $k$  cykli.

Cykliczna liczba Stirlinga oznacza więc liczbę sposobów na rozmieszczenie  $n$  obiektów w  $k$  cyklach. Jako prosty wniosek z twierdzenia 2.3.2 otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = n!.$$

*Inna definicja*

Cykliczne liczby Stirlinga definiuje się też równoważnym wzorem rekurencyjnym (porównaj [9]):

$$\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (n-1) \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]. \quad (2.3.5)$$

**Przykład 2.3.1**

Istnieje 11 różnych sposobów na stworzenie dwóch cykli z czterech elementów:  $[1, 2, 3][4]$ ,  $[1, 2, 4][3]$ ,  $[1, 3, 4][2]$ ,  $[2, 3, 4][1]$ ,  $[1, 3, 2][4]$ ,  $[1, 4, 2][3]$ ,  $[1, 4, 3][2]$ ,  $[2, 4, 3][1]$ ,  $[1, 2][3, 4]$ ,  $[1, 3][2, 4]$ ,  $[1, 4][2, 3]$ . Stąd  $\left[ \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 11$ .

Z twierdzenia 2.3.1 łatwo wyprowadzić podstawowe własności cyklicznych liczb Stirlinga.

**Twierdzenie 2.3.3**

Dla dowolnych  $k, n$  prawdziwe są własności:

- (i)  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = (n-1)!$ ,
- (ii)  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] = \binom{n}{2}$ ,
- (iii)  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0$  dla  $k > n$ .

**Twierdzenie 2.3.4**

Dla dowolnych  $n \geq 0$  i  $k \geq 0$ :

$$\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (-1)^{n+k} s(n, k).$$

Zachodzi też związek:

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (-1)^{n-k} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]. \quad (2.3.6)$$

*Symetria do wzoru (2.3.1)*

Ze wzorów (2.3.1), (2.3.3), (2.3.5) można otrzymać również wzór:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k. \quad (2.3.7)$$

*Liczby harmoniczne*

Poniższe twierdzenie pokazuje związek cyklicznych liczb Stirlinga z liczbami harmonicznymi.

**Twierdzenie 2.3.5**

Dla  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi:

$$\sum_{k=0}^n k \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = n! H_n,$$

gdzie  $H_n$  jest  $n$ -tą liczbą harmoniczną.

## 2.4. Zadania

**2.1.** Wypisać wszystkie funkcje ze zbioru  $\{a, b\}$  w zbiór  $\{A, B, C\}$ . Ile wśród nich jest funkcji różnowartościowych?

**2.2.** Ile jest funkcji ściśle rosnących ze zbioru  $\{a, b, c\}$  w zbiór  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ?

**2.3.** Ile jest funkcji ściśle rosnących ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 97\}$  w zbiór  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ?

**2.4.** Kod PIN składa się z 4 cyfr dziesiętnych.

a) Ile jest różnych kodów PIN?

b) Ile jest różnych kodów PIN, w których żadna z cyfr się nie powtarza?

**2.5.** Na ile sposobów można rozmieścić 8 wież na szachownicy tak, aby żadna z nich nie znajdowała się w polu bicia drugiej, przy założeniu, że wieże są:

a) jednakowe;

b) rozróżnialne?

**2.6.** Na ile sposobów można ułożyć  $k$  różnych książek na  $n$  półkach, przy założeniu, że każda półka mieści  $k$  książek?

**2.7.** Na ile sposobów możesz podzielić 20 osób na dwie (niekoniecznie niepuste) grupy? Na ile sposobów możesz podzielić 20 osób na trzy (niekoniecznie niepuste) grupy?

**2.8.** Wypisać wszystkie możliwe ustawienia dwóch osób w kolejkach do dwóch (trzech) kas. Na ile sposobów można ustawić 20 osób w kolejkach do dwóch (trzech) kas?

**2.9.** Wyznaczyć liczbę par  $(A, B)$ , gdzie  $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ .

**2.10.** Ile różnych par tanecznych można utworzyć z 10 kobiet i 10 mężczyzn?

**2.11.** Pewną pracę należy podzielić pomiędzy 3 kobiety, 4 chłopców oraz 5 mężczyzn. Na ile sposobów można to zrobić, przy założeniu, że mamy 3 stanowiska pracy dla kobiet, 4 dla chłopców oraz 5 dla mężczyzn?

**2.12.** Jak w zadaniu 2.11, ale dla kobiet i chłopców mamy tylko po 2 stanowiska pracy.

**2.13.** Mały Arturek ma pięć par butów. Wkładając buty, kieruje się dwiema zasadami:

- a) nigdy nie wkłada lewego buta na lewą nogę ani prawego na prawą,
- b) nigdy nie wkłada dwu butów z tej samej pary.

Na ile sposobów Arturek może włożyć buty na obie nogi?

**2.14.** Bar *Pięć Zupek* oferuje 5 zup i 10 drugich dań, natomiast bar *Sześć Zupek* – 6 zup i 8 drugich dań. Ile różnych obiadów dwudaniowych jest do wyboru, jeżeli klient decyduje się zjeść obiad w jednym z tych dwu barów?

**2.15.** *Uogólnienie zadania 2.14.* Bar *Kombinatoryka* oferuje  $n$  rodzajów dań: przystawki, drugie dania, desery etc. Menu  $i$ -tego rodzaju dania ma  $k_i$  pozycji. Na ile sposobów można zjeść posiłek  $m$ -daniowy, gdy  $m \leq n$ ?

**2.16.** Na ile sposobów można rozmieścić  $n$  osób przy okrągłym stole, jeżeli istotne jest:

- a) kto siedzi na którym miejscu;
- b) tylko kogo ma się po prawej, a kogo po lewej stronie;
- c) tylko między kim a kim się siedzi.

**2.17\*.** Na ile sposobów można ustawić na zwykłej szachownicy 8 wież tak, aby się wzajemnie nie biły?

**2.18.** Wyznaczyć rząd permutacji  $f = (1243)$ .

**2.19.** Rozłożyć na cykle permutację:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 5 & 9 & 3 & 6 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Określić typ tej permutacji.

**2.20.** Wyznaczyć wszystkie inwersje permutacji:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Określić znak tej permutacji.

**2.21.** Udowodnić, że  $n^{n/2} < n! < n^n$  dla  $n > 1$ .

**2.22.** Udowodnić, że dla  $n > 6$ :

$$n^{n/2} < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

**2.23.** Udowodnić, że dla dowolnych naturalnych  $k$  i  $n$  liczba  $(k!)^n$  jest podzielnikiem liczby  $(kn)!$ .

**2.24.** Sprawdzić, przez napisanie programu, jaką dokładność ma oszacowanie  $n!$  dane wzorem Stirlinga (2.2.1) po pominięciu czynnika  $(1 + o(1))$ . Błąd oszacowania to:

$$\frac{|n!n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}|}{n!}.$$

**2.25.** Sprawdzić, przez napisanie programu, jaką dokładność ma oszacowanie  $n!$  dane wzorem Robbinsa (2.2.2). Błąd oszacowania to:

$$\frac{|n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{1/(12n+1)} - n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{1/(12n)}|}{n!}.$$

**2.26.** Na ile sposobów można posadzić  $n$  osób przy okrągłym stole o  $m$  miejscach? Zakładamy, że  $m < n$  oraz nie jest ważne, gdzie są umieszczone osoby, dla których zabrakło miejsc przy stole.

**2.27.** Na ile sposobów można posadzić 7 osób przy 3 okrągłych stolikach tak, aby przy każdym stole zawsze siedziała przynajmniej jedna osoba i gdy ważne jest, kto obok kogo siedzi?

## 3. Kombinacje

### 3.1. Współczynnik dwumianowy

Liczba podzbiorów  $k$ -elementowych zbioru  $n$ -elementowego oznaczana jest symbolem  $\binom{n}{k}$ , zwanym *symbolem Newtona*<sup>53</sup> lub *współczynnikiem dwumianowym*. Podzbiory takie nazywa się również *kombinacjami  $k$ -wyrazowymi ze zbioru  $n$ -elementowego bez powtórzeń*. Zamiast symbolu  $\binom{n}{k}$  używany jest też symbol  $C_n^k$ . Dla  $k > n$  mamy oczywiście  $\binom{n}{k} = 0$  oraz  $\binom{0}{0} = 1$ .

*Symbol  
Newtona*

#### **Twierdzenie 3.1.1**

*Liczba podzbiorów  $k$ -elementowych zbioru  $n$ -elementowego jest równa:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \prod_{i=1}^k \frac{n-i+1}{i}. \quad (3.1.1)$$

*Dowód.* Wiadomo (patrz twierdzenie 2.1.3), że  $n^k$  jest liczbą ciągów różnowartościowych  $k$ -elementowych ze zbioru  $n$ -elementowego. Każdy taki ciąg daje zbiór  $k$ -elementowy, przy czym ten sam zbiór powstaje z dokładnie  $k!$  ciągów będących wszystkimi permutacjami tego zbioru.  $\square$

*Wzór Newtona* Symbol  $\binom{n}{k}$  występuje w tak zwanym wzorze dwumianowym podanym przez I. Newtona w 1676 roku:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \quad (3.1.2)$$

Przyjmując  $x-1$  w miejsce  $x$  oraz  $y = 1$  we wzorze (3.1.2), dostajemy:

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^k. \quad (3.1.3)$$

Podstawiając  $x = 2$ , otrzymujemy ze wzoru (3.1.3) własność (ang. *Row-Sum Property*):

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n. \quad (3.1.4)$$

Równość (3.1.4) mówi, że dowolny  $n$ -elementowy zbiór ma dokładnie  $2^n$  podzbiorów. Różniczkując (3.1.3) stronami i przyjmując  $x = 2$ , otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k = n2^{n-1}. \quad (3.1.5)$$

Oczywista jest własność (ang. *Row-Symetry Property*):

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \quad (3.1.6)$$

Wynika ona zarówno z definicji symbolu Newtona (liczba podzbiorów jest równa liczbie ich dopełnień), jak i ze wzoru (3.1.1).

Obie angielskie nazwy własności *Row-Sum Property* i *Row-Symetry Property* nie mają polskich odpowiedników. Dosłowne ich tłumaczenie nie jest przyjęte.

Symbol Newtona można uogólnić na przypadek  $\binom{x}{k}$ , gdy  $x$  jest dowolną liczbą rzeczywistą lub zespoloną:

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!},$$

gdzie  $x^{\underline{k}} = x(x-1)\dots(x-k+1)$  jest wielomianem stopnia  $k$ , określonym wzorem (2.1.9). Wtedy zgodnie ze wzorem (2.3.1) otrzymujemy:

$$\binom{x}{k} = \sum_{j=0}^k \frac{[k \atop j]}{k!} x^j,$$

gdzie  $[k \atop j]$  jest liczbą Stirlinga pierwszego rodzaju.

Do obliczeń  $\binom{n}{k}$  wygodnie jest stosować następujący wzór rekurencyjny:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (3.1.7)$$

dla  $n > 0$  i  $k > 0$ .

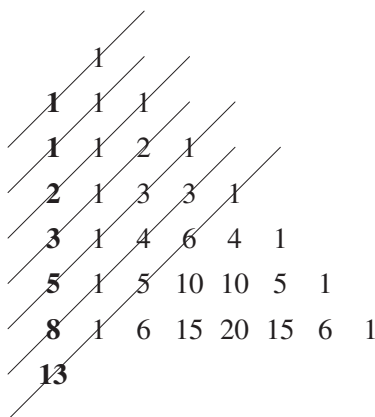
Z równości (3.1.7) otrzymuje się *trójkąt Pascala*<sup>55</sup>:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & \dots & & & & & & & 
 \end{array}$$

„Przekątne”  
w trójkącie  
Pascala

Liczby Fibonacciego  $f_n$  są sumami liczb z „przekątnych” w trójkącie Pascala. „Przekątne” w trójkącie Pascala to elementy postaci  $\binom{n-k}{k-1}$  dla  $k = 1, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ , co przedstawia rysunek 3.1. Stąd:

$$f_n = \sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n-k}{k-1}. \quad (3.1.8)$$



Rysunek 3.1. „Przekątne” w trójkącie Pascala, liczby pogrubione są liczbami Fibonacciego

Ze wzoru (3.1.1) wynika, że:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{0} &< \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \\
 &= \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \binom{n}{\lceil n/2 \rceil + 1} > \dots > \binom{n}{n}
 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

dla  $n > 1$ . Trzeba zauważyć, że dla parzystego  $n$  mamy  $\lfloor n/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$ .

*Oszacowania*      Znane są proste oszacowania z góry:

$$\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!}, \quad (3.1.10)$$

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}. \quad (3.1.11)$$

Bardziej skomplikowane jest oszacowanie z dołu:

$$\binom{n}{k} \geq \frac{1}{2\pi} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{k^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{12k} - \frac{1}{12(n-k)}\right). \quad (3.1.12)$$

Z oszacowań tych wynika, że  $\binom{n}{k}$  szybko rośnie wraz ze wzrostem  $n$  oraz  $k$ .

### Twierdzenie 3.1.2

Dla dowolnych liczb naturalnych  $k, l, r$ :

$$\binom{l+r}{k} = \sum_{t=0}^k \binom{l}{t} \binom{r}{k-t}. \quad (3.1.13)$$

*Tożsamość  
Cauchy'ego*

Równość (3.1.13) jest znana jako tożsamość Cauchy'ego lub spłot Vandermonde'a<sup>72</sup>.

Z twierdzenia 3.1.2 wynikają dla nieujemnych  $l, m, n, q, r, s$  kolejne wzory:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-m}^n \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} &= \binom{r+s}{m+n}, \\ \sum_{k=-m}^n \binom{l}{m+k} \binom{s}{n+k} &= \binom{l+s}{l-m+n}, \\ \sum_{k=-m}^n \binom{l}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k &= (-1)^{l+m} \binom{s-m}{n-l}. \end{aligned}$$

Liczba sposobów rozmieszczenia  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$  obiektów w  $n$  pudełkach z  $a_1$  obiektami w pierwszym pudełku,  $a_2$  w drugim oraz  $a_n$  w  $n$ -tym jest nazywana *współczynnikiem wielomianowym*. Współczynniki wielomianowe wyrażane są wzorem:

$$\binom{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1, a_2, \dots, a_n} = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)!}{a_1! a_2! \dots a_n!}. \quad (3.1.14)$$

Jeśli którakolwiek z liczb  $a_i$  jest ujemna, to współczynnik ten jest zerem. Nazwa pochodzi stąd, że:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_n \\ 0 \leq a_i \leq n}} \binom{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1, a_2, \dots, a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_n}. \quad (3.1.15)$$

Wzory (3.1.14) i (3.1.15) są uogólnieniami odpowiednio wzorów (3.1.2) i (3.1.1). Współczynniki wielomianowe stosuje się tylko wtedy, gdy  $n \geq 2$ . W szczególności, gdy  $n = 2$ , współczynniki wielomianowe redukują się do zwykłego współczynnika dwumianowego, gdyż:  $k_1 + k_2 = n$

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} = \frac{n!}{k_1 (n - k_1)!} = \binom{n}{k_1}.$$

## 3.2. Generowanie podzbiorów

Wszystkie podzbiory zbioru  $X$  można wyznaczyć różnymi metodami.

**Sposób 1.** Wystarczy zauważyć, że wektorowi  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , gdzie  $b_i \in \{0, 1\}$ , odpowiada liczba z przedziału  $[0, 2^n - 1]$ . Wartość dowolnej  $n$ -cyfrowej liczby można przedstawić binarnie w postaci:

$$a_{n-1}a_{n-2} \dots a_2a_1a_0(2) \\ = a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \dots + a_22^2 + a_12 + a_0,$$

gdzie  $a_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

### Przykład 3.2.1

Niech  $X = \{a, b, c, d, e\}, |X| = n = 5$ . Na przykład podzbiorowi trzeylementowemu  $Y = \{b, d, e\} \subseteq X$  odpowiada ciąg  $(0, 1, 0, 1, 1)$ , czyli:

$$01011(2) = 11 \in [0, 31].$$

Ogólnie, wypisując po kolei wszystkie liczby z przedziału  $[0, 2^n - 1]$  w systemie dwójkowym, można wskazać wszystkie podzbiory zbioru  $n$ -elementowego.

*Kod Graya*

**Sposób 2.** Binarny kod Graya<sup>25</sup> rzędu  $n$  jest ciągiem długości  $2^n$  wektorów binarnych  $n$ -elementowych, w którym każdy kolejny wektor różni się od poprzedniego tylko jedną współrzędną. Dla dowolnego naturalnego  $n \geq 1$  kod Graya można wyznaczyć rekurencyjnie:

1. dla  $n = 1$  ciąg składa się z dwóch jednoelementowych wektorów binarnych  $C_1 = (0)$  i  $C_2 = (1)$ ,
2. jeśli dla  $n > 1$  mamy wyznaczony ciąg  $n$ -elementowych wektorów binarnych  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , ( $m = 2^n$ ), w którym dwa sąsiednie wektory różnią się dokładnie jedną współrzędną, to tworzymy ciąg wektorów binarnych  $(n + 1)$ -elementowych według schematu:

$$(C_1, 0), (C_2, 0), \dots, (C_{m-1}, 0), (C_m, 0), \\ (C_m, 1), (C_{m-1}, 1), \dots, (C_1, 1).$$

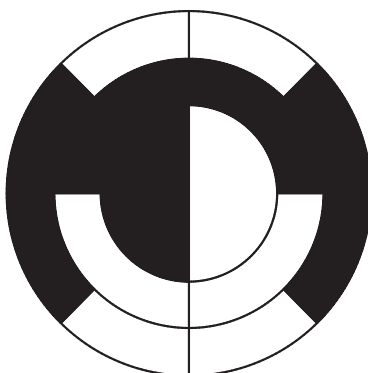
### Przykład 3.2.2

Kody Graya dla  $n = 1, \dots, 4$ :

$n = 1 :$	0	1						
$n = 2 :$	00	10	11	01				
$n = 3 :$	000	100	110	010	011	111	101	001
$n = 4 :$	0000	1000	1100	0100	0110	1110	1010	0010
		0011	1011	1111	0111	0101	1101	1001

Kod Graya jest często wykorzystywany w różnych zastosowaniach. Używa się go na przykład w przetwornikach analogowo-cyfrowych czy przy etykietowaniu pojedynczych procesorów w sieci będącej kostką. Na rysunku 3.2 przedstawiona jest tarcza kodowa dla liczb trzybitowych. Przy obrocie tarczy tylko na jednym pierścieniu zmienia się pole czarne (jedynka) na białe (zero) lub odwrotnie.

Kod Graya



Rysunek 3.2. Tarcza przetwornika kodu Graya

Poniżej podajemy sposób generowania wszystkich  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru  $X$ . Niech  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Każdemu podzbiorowi  $k$ -elementowemu odpowiada rosnący podciąg  $k$ -elementowy.

*Porządek leksykograficzny*

W zbiorze podciągów  $k$ -elementowych wprowadzimy porządek leksykograficzny, czyli słownikowy, w następujący sposób: jeżeli

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, \dots, a_k), \\ b &= (b_1, b_2, \dots, b_k) \end{aligned}$$

i dla pewnego  $j$  jest  $a_i = b_i$  dla  $i < j$  oraz  $a_j < b_j$ , to  $a \prec b$ . Oczywiście, jeśli  $a_1 < b_1$ , to również  $a \prec b$ . Tak określoną relację  $\prec$  można przenieść z ciągów na podzbiory.

Łatwo też sformułować algorytm generujący wszystkie  $k$ -elementowe podzbiory zbioru  $X$  w porządku leksykograficznym. Wystarczy zauważyć, że ciągiem następującym po  $a = (a_1, \dots, a_k)$  jest ciąg

$$\begin{aligned} b &= (b_1, \dots, b_k) \\ &= (a_1, \dots, a_{p-1}, a_p + 1, a_p + 2, \dots, a_p + k - p + 1), \end{aligned}$$

gdzie  $p = \max\{i : a_i < n - k + 1\}$ . Po ciągu  $b$  następuje ciąg

$$\begin{aligned} c &= (c_1, \dots, c_k) \\ &= (b_1, \dots, b_{p'-1}, b'_p + 1, b'_p + 2, \dots, b'_p + k - p + 1), \end{aligned}$$

gdzie

$$p' = \begin{cases} p - 1, & \text{jeśli } b_k = n, \\ k, & \text{jeśli } b_k < n. \end{cases}$$

Zakłada się, że ciągi  $a$  oraz  $b$  są różne od ciągu  $(n - k + 1, \dots, n)$  – ostatniego w tym porządku. Stąd algorytm.

### 3.3. Zbiory z powtórzeniami

*Multizbiór*

Uogólnieniem pojęcia zbioru (w którym każdy element występuje dokładnie raz) jest zbiór z powtórzeniami (multizbiór). W multizbiorze każdy element może wystąpić kilkakrotnie, a liczba wystąpień nazywa się krotnością elementu. Istotna jest tu tylko krotność elementu, a nieistotna jest kolejność wystąpień. Zbiór taki oznacza się, albo wypisując element tyle razy, ile wynosi jego krotność, albo dla krotności równej  $k$  elementu  $a$ , pisząc  $\{\dots, k * a, \dots\}$ .

#### Przykład 3.3.1

Jeśli  $X = \{2 * a, 3 * b, 1 * c\}$ , to również  $X = \{a, b, a, b, c, b\} = \{a, a, b, b, b, c\}$ , ale  $X \neq \{a, b, c\}$ .

Zbiór  $A$  jest podzbiorem zbioru  $B$ ,  $A \subseteq B$ , gdy krotność każdego elementu w  $A$  jest nie większa od krotności tego samego elementu w  $B$ .

Liczbę elementów  $k$  w zbiorze  $X = \{k_1 * x_1, \dots, k_n * x_n\}$ , to znaczy licznosc zbioru  $X$ , definiuje się jako  $k = k_1 + \dots + k_n$ . Podzbiór zbioru z powtórzeniami jest wyznaczany przez wektor  $n$ -elementowy  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ , w którym  $0 \leq m_1 \leq k_1, \dots, 0 \leq m_n \leq k_n$ . Liczba wszystkich podzbiorów zbioru z powtórzeniami o krotnościach  $k_1, k_2, \dots, k_n$  jest równa  $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1)$ . Zauważmy, że dla zbioru bez powtórzeń, czyli dla  $k_1 = \dots = k_n = 1$ , liczba podzbiorów jest równa  $2^n$  (patrz wzór (3.1.4) na str. 45).

### Twierdzenie 3.3.1

*Liczba  $k$ -elementowych zbiorów z powtórzeniami o elementach ze zbioru  $n$ -elementowego (bez powtórzeń) jest równa:*

$$\binom{n+k-1}{k}. \quad (3.3.1)$$

*Dowód.* Rozważmy uporządkowane rozmieszczenie  $k$  obiektów w  $n$  pudełkach. Liczba takich rozmieszczeń jest równa:

$$n^{\overline{k}} = n(n+1) \dots (n+k-1).$$

Każde takie rozmieszczenie wyznacza  $n$ -elementowy wektor  $(r_1, \dots, r_n)$ , dla którego zachodzi  $r_1 + \dots + r_n = k$ , gdzie  $r_i$  jest liczbą obiektów w pudełku  $i$ . Wektor  $(r_1, \dots, r_n)$  odpowiada  $k$ -elementowemu podzbirowi  $\langle r_1 * x_1, \dots, r_n * x_n \rangle$ . Dodatkowo  $k!$  rozmieszczeń wyznacza ten sam podzbiór  $k$ -elementowy, a zatem liczba różnych podzbiorów  $k$ -elementowych zbioru z powtórzeniami o wszystkich krotnościach równych  $k$  wynosi:

$$\begin{aligned} \frac{n^{\overline{k}}}{k!} &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \\ &= \binom{n+k-1}{k}. \end{aligned}$$

□

### Przykład 3.3.2

Niech  $A = \{a, b, c\}$ , czyli  $n = 3$ , oraz niech  $k = 2$ . Zgodnie ze wzorem (3.3.1) z elementów zbioru  $A$  można utworzyć:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{4}{2} = 6$$

dwuelementowych podzbiorów z powtórzeniami:

$$\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{c, c\}.$$

Zbiorów czteroelementowych z powtórzeniami można zaś utworzyć

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15.$$

### 3.4. Zadania

**3.1.** Napisać trójkąt podobny do trójkąta Pascala, którego elementami są liczby Stirlinga pierwszego rodzaju.

**3.2.** Udowodnić wzór (3.1.7), to znaczy pokazać, że dla  $n > 0$  i  $k > 0$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} :$$

a) rachunkowo z definicji symbolu Newtona,

b) rozważając liczby podzbiorów  $k$  oraz  $(k-1)$ -elementowych w zbiorze  $(n-1)$ -elementowym.

**3.3.** Co jest większe:  $\binom{100}{37}$  czy  $\binom{101}{55}$ ?

**3.4.** Obliczyć, ile jest wszystkich pięcioelementowych podzbiorów zbioru  $X = \{x \in N : 4 < x \leq 12\}$ .

**3.5.** Dziecko chce kupić 5 baloników. W sklepie są balony w 8 różnych kolorach. Na ile sposobów może kupić te baloniki, jeśli:

a) wybrane baloniki mogą być w tym samym kolorze,

b) wybrane baloniki nie mogą być tego samego koloru?

**3.6.** Udowodnić równość:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}.$$

**3.7.** Ile jest funkcji niemalejących ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 97\}$  w zbiór  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ?

**3.8.** Na ile sposobów można rozdać 52 karty pomiędzy 4 graczy tak, aby każdy miał 13 kart?

**3.9.** Na ile sposobów spośród 7 blondynów i 8 brunetów można wybrać pięcioosobową delegację, w której składzie jest dokładnie  $i$  blondynów ( $i = 1, 2, \dots, 5$ )?

**3.10.** Udowodnić tożsamość (ang. *Subset-of-a-Subset-Identity*):

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}.$$

**3.11.** Pokazać, że prawdziwy jest wzór:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2.$$

**3.12.** Udowodnić przez indukcję oraz czysto kombinatorycznie regułę sumowania równoległego:

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

oraz regułę sumowania po górnym indeksie (ang. *upper summation*):

$$\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

**3.13.** Udowodnić małe twierdzenie Fermata<sup>17</sup>. Jeżeli  $n$  jest liczbą całkowitą,  $p$  jest liczbą pierwszą, to  $n^p - n$  jest liczbą podzielną przez  $p$ . Innymi słowy, jeżeli  $p$  jest ustaloną liczbą pierwszą, to dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  istnieje liczba całkowita  $r$  taka, że  $n^p - n = pr$ .

## 4. Podziały

### 4.1. Podziały zbioru

*Podziałem zbioru  $n$ -elementowego  $X$  na  $k$  bloków  $B_i \subseteq X$ , gdzie  $i = 1, \dots, k$ , nazywamy dowolną rodzinę zbiorów  $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  taką, że  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = X$ ,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  dla  $1 \leq i < j \leq k$  oraz  $B_i \neq \emptyset$ ,  $1 \leq i \leq k$ .*

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$B_1, B_2, \dots, B_k$  – bloki podziału zbioru  $X$ ,

$\Pi_k(X)$  – zbiór wszystkich podziałów zbioru  $X$  na  $k$  bloków,

$\Pi(X) = \Pi_1(X) \cup \dots \cup \Pi_n(X)$  – zbiór wszystkich podziałów zbioru  $X$ .

#### Przykład 4.1.1

Istnieje 6 podziałów zbioru czteroelementowego  $X = \{a, b, c, d\}$  na 3 bloki:

$$\begin{aligned}\Pi_3(X) = \{ \\ \pi_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}, \\ \pi_2 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}, \\ \pi_3 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}, \\ \pi_4 = \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}, \\ \pi_5 = \{\{a\}, \{b, d\}, \{c\}\}, \\ \pi_6 = \{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\} \\ \}.\end{aligned}$$

$$\Pi_3(X) = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}, |\Pi_3(X)| = 6.$$

Przypomnijmy, że relacja  $R$  jest symetryczna, jeśli dla dowolnych  $x, y$  mamy  $xRy \Rightarrow yRx$ . Relacja, która jest symetryczna, zwrotna i przechodnia (patrz str. 11), jest relacją równoważności. Pomiędzy podziałami zbioru i relacjami zachodzą poniższe związki. Każdemu

podziałowi  $\pi \in \Pi(X)$  można przyporządkować relację równoważności  $E(\pi)$  na zbiorze  $X$ , definiując ją jako  $E(\pi) = \bigcup_{B \in \pi} B \times B$ , to znaczy dwa elementy  $x, y \in X$  są w relacji  $E(\pi)$  wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tego samego bloku podziału. Każdej relacji równoważności  $E$  na zbiorze  $X$  można z kolei przyporządkować podział zbioru  $X$  na bloki, definiując go jako  $X|E = \{x|E : x \in X\}$ , gdzie pojedynczy blok  $x|E = \{y \in X : xEy\}$  nazywany jest *klasą abstrakcji* lub *klasą równoważności* elementu  $x$  (zobacz dodatek A.2). W zbiorze wszystkich podziałów zbioru  $\Pi(X)$  można wprowadzić relację porządkującą. W tym celu rozważmy dwa podziały:  $\pi, \sigma \in \Pi(X)$ . Podział  $\pi$  jest *rozdrobnieniem* podziału  $\sigma$ , jeśli każdy blok  $B$  podziału  $\sigma$  jest sumą mnogościową pewnej liczby bloków podziału  $\pi$ , co zapisujemy w postaci:  $\pi \leq \sigma$ . Relacja ta jest relacją porządku na zbiorze  $\Pi(X)$ .

Pomiędzy podziałami zbioru  $X = \{a, b, c, d, e\}$  zachodzi relacja:

Mając podział  $\sigma = \{B_1, \dots, B_k\}$  dla zbioru  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ , możemy utworzyć  $k+1$  podziałów zbioru  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  w następujący sposób:

*Zasada szufladkowa Dirichleta*<sup>13</sup> (niem. *Dirichletsche Schubfachprinzip*) w sformułowaniu potocznym głosi, że jeżeli chcemy rozmieścić  $n + 1$  przedmiotów w  $n$  szufladkach, to co najmniej jedna szufladka będzie zawierać więcej niż jeden przedmiot. Terminologia polska nie jest jednolita. Zasadę szufladkową nazywa się też zasadą pudełkową lub zasadą gniazd gołębih (ang. *pigeonhole principle*), mówi się tam bowiem o rozmieszczeniu  $n$  gołębi w  $k$  gniazdach.

Na konferencję przyjechało 100 matematyków, z których 85 władało językiem angielskim, 80 – francuskim, 70 – polskim, 66 – niemieckim. Czy wśród matematyków był taki, który władał wszystkimi czterema językami?

Łączna liczba języków, którymi władali uczestnicy konferencji, wynosi  $85 + 80 + 70 + 66 = 301$ . Wobec tego, na mocy zasady szufladkowej, co najmniej jeden z nich zna 4 języki. Gdyby każdy władał co najwyżej trzema językami, to ogółem znalazliby oni co najwyżej 300 języków.

Bardziej ściśle określenie zasady szufladkowej podaje poniższe twierdzenie. Szufladki z pierwszego sformułowania są w tym twierdzeniu zbiorami.

#### **Twierdzenie 4.2.1**

*Niech dany będzie zbiór skończony  $X$  mający  $n$  elementów. Przypuśćmy, że jest on sumą  $k$  zbiorów parami rozłącznych:*

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$$

*oraz  $n > k$ . Wówczas któryś ze zbiorów  $X_i$  ma co najmniej dwa elementy.*

#### **Przykład 4.2.2**

Pewna grupa  $n$  osób wita się, podając sobie ręce, przy czym nikt nie wita się sam ze sobą i żadna para osób nie wita się więcej niż jeden raz. Czy jest możliwe, aby każda z tych osób ścisnęła inną liczbę dłoni?

Na pozór mogłoby się wydawać, że jest to możliwe, ponieważ liczba możliwych uścisków jednej osoby może przybierać dowolną spośród wartości od 0 do  $n - 1$ , których jest przecież  $n$ . Zauważmy jednak, że skrajne przypadki 0 i  $n - 1$  wykluczają się wzajemnie (nie jest możliwe, by któraś z osób nie uściśnęła żadnej dłoni i jednocześnie ktoś inny przywitał się ze wszystkimi). Zatem na mocy zasady szufladkowej muszą istnieć dwie osoby, które wymieniły tę samą liczbę uścisków.

#### **Przykład 4.2.3**

Pokazać, że wśród dowolnych  $n$  liczb całkowitych istnieje podzbiór, którego suma elementów dzieli się przez  $n$ .

Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Rozważmy  $n$  zbiorów  $A_1 = \{a_1\}$ ,  $A_2 = \{a_1, a_2\}$ ,  $\dots$ ,  $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  oraz  $n$  szufladek ponumerowanych liczbami  $0, 1, \dots, n - 1$ . Umieśćmy zbiór  $A_i$  w szufladce  $j$ , jeśli reszta z dzielenia sumy  $a_1 + a_2 + \dots + a_i$  przez  $n$  wynosi  $j$ . Jeżeli szufladka numer zero nie jest pusta, to znajdujący się w niej zbiór ma sumę dzielącą się przez  $n$ . W przeciwnym razie  $n$  zbiorów  $A_i$  jest rozmieszczonych w  $n - 1$  szufladkach, a zatem istnieją dwie liczby  $r < s$  takie, że  $a_1 + a_2 + \dots + a_r \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_s \pmod{n}$  (zobacz dodatek A.1). Wówczas różnica tych sum  $a_{r+1} + \dots + a_s$  musi się dzielić przez  $n$ .

Inne sformułowanie zasady szufladkowej Dirichleta korzysta z pojęcia funkcji. Szufladkami są tutaj warstwy funkcji, to znaczy są nimi przeciwobrazy jednoelementowych podzbiorów zbioru  $Y$ .

### Twierdzenie 4.2.2

*Niech  $X$  oraz  $Y$  będą zbiorami skończonymi mającymi odpowiednio  $n$  oraz  $k$  elementów. Jeżeli  $n > k$ , to żadna funkcja określona na zbiorze  $X$  o wartościach w zbiorze  $Y$  nie jest różnowartościowa, czyli dla każdej funkcji  $f : X \rightarrow Y$  istnieją różne elementy  $a, b \in X$ , dla których  $f(a) = f(b)$ .*

### Przykład 4.2.4

Czy prawdziwe jest stwierdzenie, że jeśli drzew w parku jest więcej niż liści na każdym z nich, to przynajmniej na dwóch drzewach liczba liści jest jednakowa (zakładamy, że nie istnieją drzewa bezlistne)?

Rozważamy przyporządkowanie  $f$ , które każdemu drzewu przyporządkowuje liczbę liści znajdujących się na nim. Niech  $A$  oznacza zbiór drzew ( $|A| = n$ ), a  $B$  – zbiór, którego elementy określają liczbę liści na każdym z drzew. Jeżeli  $B = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  (zbiór  $B$  spełnia warunki zadania, gdyż każda z liczb  $0, 1, 2, \dots, n-1$  jest mniejsza od  $n$ ), to nasze stwierdzenie jest prawdziwe (ponieważ  $f$  jest przyporządkowaniem różnowartościowym). Jeśli wykluczmy przypadek istnienia bezlistnych drzew, to  $|B| < |A|$ . Wtedy  $B = \{1, 2, \dots, n-1\}$  oraz  $f$  nie jest już odwzorowaniem różnowartościowym, czyli przyporządkowuje dwóm różnym drzewom tę samą liczbę liści. Zatem odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest pozytywna.

Ogólnie zasadę szufladkową Dirichleta opisuje poniższe twierdzenie.

### Twierdzenie 4.2.3

*Jeśli skończony zbiór  $X$  jest podzielony na  $k$  zbiorów, to co najmniej jeden z tych zbiorów ma  $\frac{|X|}{k}$  lub więcej elementów.*

*Dowód.* Niech  $B_1, B_2, \dots, B_k$  będą blokami tego podziału. Wtedy średnia wartość  $|B_i|$  wynosi:

$$\frac{1}{k} (|B_1| + |B_2| + \dots + |B_k|) = \frac{1}{k} |X|,$$

a więc najliczniejszy ze zbiorów  $B_i$  ma co najmniej tyle elementów.  $\square$

Uogólniona  
zasada  
szufladkowa

Zasadę szufladkową można uogólnić.

#### Twierdzenie 4.2.4

Jeżeli  $n$  przedmiotów rozmieścimy w  $k$  szufladkach oraz  $n > km$ , gdzie  $m$  jest pewną liczbą naturalną, to w którejś szufladce znajdzie się więcej niż  $m$  przedmiotów.

#### Twierdzenie 4.2.5

Jeżeli  $km + 1$  przedmiotów umieścimy w  $m$  szufladkach,  $k, m \in \mathbb{N}$ , to w pewnej szufladce będzie co najmniej  $k + 1$  przedmiotów.

Zasada szufladkowa Dirichleta jest jednym z najważniejszych narzędzi w dowodach istnienia, to znaczy wtedy, gdy dowodzimy istnienia obiektu o danych własnościach, jednakże bez jawnego wskazania tego elementu.

### 4.3. Zasada włączania-wyłączania

Dwa zbiory

Obliczmy liczbę elementów sumy zbiorów. Oczywiście jest wzór:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \leq |A| + |B|, \quad (4.3.1)$$

prawdziwy dla dowolnych zbiorów  $A$  oraz  $B$ .

Trzy zbiory

Dla trzech zbiorów  $A$ ,  $B$  oraz  $C$  mamy:

$$\begin{aligned} & |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ & \leq |A \cup B \cup C| \\ & = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

#### Przykład 4.3.1

W pewnej grupie jest 10 osób znających język angielski i 15 znających język francuski. 6 spośród nich zna oba te języki. Ile osób jest w tej grupie? Przyjmujemy oznaczenia:

$A$  – zbiór osób znających język angielski,

$B$  – zbiór osób znających język francuski.

Pytamy o liczbę elementów sumy  $A \cup B$ . Dla dowolnych zbiorów skończonych  $A$  oraz  $B$  zachodzi wzór  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ . Wobec tego liczba osób w grupie to  $10 + 15 - 6 = 19$ .

**Przykład 4.3.2**

W pewnej grupie jest 10 osób znających język angielski, 15 znających język francuski i 12 znających język rosyjski. Spośród nich 5 zna język angielski i francuski, 4 znają język francuski i rosyjski, 3 znają język angielski i rosyjski, a tylko 2 znają wszystkie te języki. Ile osób jest w tej grupie?

Łatwo zauważyć, że:  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 10 + 15 + 12 - 5 - 4 - 3 + 2 = 27$ .

Jak widać ze wzorów (4.3.1) i (4.3.2), dodając do siebie liczby elementów dwóch zbiorów, dwukrotnie liczymy część wspólną – trzeba ją odjąć. Dla trzech zbiorów, odejmując trzykrotnie części wspólne par zbiorów, odejmujemy o jeden raz za dużo część wspólną wszystkich trzech podzbiorów – trzeba ją więc dodać. Powtarzając to rozumowanie, otrzymujemy następujący wynik, znany jako *zasada włączania-wyłączania* (ang. *inclusion-exclusion principle*). Jej autorstwo przypisuje się A. de Moivre'owi<sup>48</sup>.

**Twierdzenie 4.3.1**

*Zasada  
włączania-  
wyłączania*

Jeśli dla dowolnego ciągu  $(A_1, \dots, A_n)$  niekoniecznie różnych podzbiorów zbioru  $X$ :

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n,$$

to

$$\begin{aligned} |A| = & \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

*Dowód* (przez indukcję). Wzór (4.3.3) jest oczywisty dla  $n = 1$  (także dla  $n = 2$  – wzór (4.3.1), i dla  $n = 3$  – wzór (4.3.2)). Przyjmijmy, że wzór (4.3.3) jest prawdziwy dla  $n - 1$ , czyli dla  $A' = A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$  prawdziwy jest wzór:

$$\begin{aligned} |A'| = & \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & - \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}|. \end{aligned}$$

Ponieważ:

$$A' \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n),$$

to:

$$|A' \cap A_n| = \sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| + \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Stąd:

$$|A| = |A' \cup A_n| = |A'| + |A_n| - |A' \cap A_n|,$$

co daje wzór (4.3.3).  $\square$

Zasadę włączania i wyłączania stosuje się głównie, gdy:

- chcemy jedynie znać wielkość zbioru  $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$  bez wypisywania jego elementów;
- liczby elementów wielokrotnych przecięć łatwo daje się obliczyć.

Rozważmy problem ogólniejszy. Niech  $D(r)$  oznacza liczbę elementów  $x \in X$  takich, które należą do dokładnie  $r$  zbiorów  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $r \leq n$ ,  $A_i \subseteq X$ . Niech  $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$  będzie dowolnym ciągiem. Przyjmijmy oznaczenia:

$$N(i_1, \dots, i_r) = |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}| \quad (4.3.4)$$

oraz

$$W(r) = \sum N(i_1, \dots, i_r), \quad (4.3.5)$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich ciągach

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n.$$

Przyjmujemy też  $W(0) = |X|$ .

### Twierdzenie 4.3.2

Dla dowolnych  $n > 0$  oraz  $r \leq n$ :

$$D(r) = \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^{-j} \binom{r+j}{r} W(r+j). \quad (4.3.6)$$

*Dowód.* Oznaczmy:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} L(x) &= D(r), \\ \sum_{x \in X} R(x) &= \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^{-j} \binom{r+j}{r} W(r+j). \end{aligned}$$

Wzór (4.3.6) można teraz zapisać w postaci:

$$\sum_{x \in X} L(x) = \sum_{x \in X} R(x),$$

gdzie:

$$L(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \text{ należy do dokładnie } r \text{ zbiorów } A_i, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Podobnie:

$$R(x) = \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{r+j}{r} R_{r+j}(x), \quad (4.3.7)$$

gdzie  $R_{r+j}(x)$  jest liczbą ciągów postaci:  $A_{i_1}, \dots, A_{i_{r+j}}$  takich, że  $1 \leq i_1 < \dots < i_{r+j} \leq n$  oraz  $x \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{r+j}}$ . Dla dowodu wzoru (4.3.6) wystarczy teraz pokazać, że dla każdego  $x \in X$  zachodzi  $L(x) = R(x)$ .

Niech  $x \in X$  oraz  $x$  należy do dokładnie  $u$  zbiorów  $A_i$ . Mamy tu trzy możliwe przypadki:

- (i)  $u < r$ . Ponieważ  $x \notin A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}$ , to  $L(x) = 0$  oraz  $R(x) = 0$ .
- (ii)  $u = r$ . Ponieważ  $R_{r+j}(x) = 0$  dla  $j > 0$  oraz

$$(-1)^0 \binom{r+0}{r} R_{r+0}(x) = R_r(x) = 1,$$

to  $L(x) = 1$  i  $R(x) = 1$ .

- (iii)  $u > r$ . Wtedy  $L(x) = 0$  oraz  $R_m(x) = \binom{u}{m}$ . Podstawiając tę wartość do (4.3.7) i korzystając z tożsamości:

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$$

(patrz zadanie 3.10) oraz

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} = 0,$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 R(x) &= \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{r+j}{r} \binom{u}{r+j} \\
 &= \sum_{j=1}^{u-r} (-1)^j \binom{r+j}{r} \binom{u}{r+j} \\
 &= \sum_{j=1}^{u-r} (-1)^j \binom{u}{r} \binom{u-r}{u-r-j} \\
 &= \binom{u}{r} \sum_{j=0}^{u-r} (-1)^j \binom{u-r}{j} = 0.
 \end{aligned}$$

□

Korzystając z twierdzenia 4.3.2, zasadę włączania-wyłączania można teraz sformułować w postaci następującego twierdzenia.

### **Twierdzenie 4.3.3**

$$D(0) = \sum_{j=0}^n (-1)^j W(j).$$

*Nieporządek*

*Nieporządek* na zbiorze  $X$  jest permutacją  $f$  spełniającą warunek  $f(x) \neq x$  dla każdego  $x \in X$ , to znaczy jest permutacją bez punktów stałych. Pytanie o liczbę nieporządków nazywane było zadaniem Eulera<sup>16</sup>. Wcześniej (w 1713 roku) badał te liczby francuski matematyk P. de Montmort<sup>49</sup>. Twierdzenie pozwalające wyznaczyć liczbę nieporządków zostało udowodnione za pomocą zasady włączania i wyłączania w 1718 roku przez A. de Moivre'a<sup>48</sup>. Z twierdzenia 4.3.3 wynika (czego dowód pominiemy) poniższe twierdzenie.

### **Twierdzenie 4.3.4**

*Liczba nieporządków  $D_n$  dla  $n$ -elementowego zbioru  $|X|$  dana jest wzorem:*

$$D_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)! = n! \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j!}. \quad (4.3.8)$$

Liczbę nieporządków danego zbioru  $n$ -elementowego oznacza się również symbolem podsiłni  $!n$  i nazywa dolną siłnią. Zwróćmy uwagę, że pojęcie to pojawiło się już wcześniej i oznaczało potęgę ubywającą

(zobacz na przykład wzór (2.1.1)). Można ją też określić rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} !0 &= 1, \\ !1 &= 0, \\ !n &= (n-1) (! (n-1) + ! (n-2)). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

### Przykład 4.3.3

Istnieje 6! permutacji zbioru trzeylementowego: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1). Nieporządki są dwa, ponieważ ze wzoru rekurencyjnego (4.3.9) mamy:

$$\begin{aligned} !3 &= (3-1) (! (3-1) + ! (3-2)) = 2 (!2 + !1) \\ &= 2 ((2-1) (! (2-1) + ! (2-2)) + 0) = 2 (1 (!1 + !0)) = 2. \end{aligned}$$

Są nimi permutacje: (2, 3, 1), (3, 1, 2).

Ze wzoru (4.3.8) wynika, że przy  $n \rightarrow \infty$  nieporządki stanowią asymptotycznie  $e^{-1} = 0.36788 \dots$  wszystkich permutacji.

## 4.4. Liczby Stirlinga drugiego rodzaju

Podział  $\pi$   $n$ -elementowego zbioru  $X$  jest typu  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , jeśli zawiera  $\lambda_i$  bloków  $i$ -elementowych. Typ taki zapisujemy jako  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ .

### Twierdzenie 4.4.1

Liczba podziałów typu  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$  zbioru  $n$ -elementowego, gdzie  $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n$ , jest równa:

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n! (1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \dots (n!)^{\lambda_n}}.$$

Liczba takich podziałów jest równa liczbie permutacji typu  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$  zbioru  $n$ -elementowego (patrz twierdzenie 2.2.3).

Liczba pogrupowań  $n$  różnych obiektów w dokładnie  $k$  grupach to podzbiorowa liczba Stirlinga<sup>67</sup> nazywana liczbą Stirlinga drugiego rodzaju. Określa ona liczbę sposobów podziału zbioru  $n$ -elementowego na  $k$  niepustych podzbiorów. Oznaczana jest jako  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  lub  $S(n, k)$ .

**Przykład 4.4.1**

Istnieje siedem sposobów podziału zbioru czteroelementowego na dwie części:  $\{1, 2, 3\} \cup \{4\}$ ,  $\{1, 2, 4\} \cup \{3\}$ ,  $\{1, 3, 4\} \cup \{2\}$ ,  $\{2, 3, 4\} \cup \{1\}$ ,  $\{1, 2\} \cup \{3, 4\}$ ,  $\{1, 3\} \cup \{2, 4\}$ ,  $\{1, 4\} \cup \{2, 3\}$ . Stąd  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 7$ .

*Dwie definicje liczb Stirlinga*

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju określa się wzorem:

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\overline{k}} \quad (4.4.1)$$

lub

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\overline{k}}. \quad (4.4.2)$$

**Twierdzenie 4.4.2**

*Definicje liczb Stirlinga określone wzorami (4.4.1) i (4.4.2) są równoważne.*

Zwróćmy uwagę na związek między liczbami Stirlinga pierwszego i drugiego rodzaju wyrażony wzorami (2.3.1) i (4.4.1).

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju można też wyrazić jawnie.

**Twierdzenie 4.4.3**

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^k. \quad (4.4.3)$$

**Twierdzenie 4.4.4**

*Liczby Stirlinga drugiego rodzaju spełniają wzór rekurencyjny:*

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} \quad (4.4.4)$$

dla  $0 < k < n$  oraz  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$  dla  $n \geq 0$  i  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$  dla  $n > 0$ .

**Przykład 4.4.2**

Wyznamy liczbę podziałów zbioru czteroelementowego na trzy części.

Korzystając z twierdzenia 4.4.4, obliczymy rekurencyjnie  $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}$ .

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{smallmatrix} 4-1 \\ 3-1 \end{smallmatrix} \right\} + 3 \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} 4-1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + 3 \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{smallmatrix} 3-1 \\ 2-1 \end{smallmatrix} \right\} + 2 \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} 3-1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + 3 \cdot 1 = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + 2 \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + 3 \\ &= \left\{ \begin{smallmatrix} 2-1 \\ 1-1 \end{smallmatrix} \right\} + 1 \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} 2-1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + 2 \cdot 1 + 3 = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} + 1 \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + 5 \\ &= 0 + 1 \cdot 1 + 5 = 6. \end{aligned}$$

Oznacza to, że istnieje 6 podziałów zbioru czteroelementowego na trzy części (patrz przykład 4.1.1).

Poniższe twierdzenie pokazuje podstawowe własności liczb Stirlinga drugiego rodzaju.

#### **Twierdzenie 4.4.5**

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} &\leq \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right], \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} &= 0 \quad \text{dla } n > 0, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} &= 1 \quad \text{dla } n > 0, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} &= 2^{n-1} - 1 \quad \text{dla } n > 0, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} &= \binom{n}{2}, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} &= 0 \quad \text{dla } k > n. \end{aligned}$$

#### **Twierdzenie 4.4.6**

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = |\Pi_k(X)|, \quad (4.4.5)$$

gdzie  $|X| = n$ , a  $\Pi_k(X)$  jest zbiorem wszystkich podziałów zbioru  $X$  na  $k$  bloków.

Z twierdzenia 4.4.1 wynika wzór:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = k \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n}} \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n! (1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \dots (n!)^{\lambda_n}}.$$

*Liczby Bella*

Liczba możliwych pogrupowań  $n$  obiektów, jeśli są one wszystkie rozróżnialne, nazywa się *liczbą Bella*<sup>3</sup>. Liczba Bella o numerze  $n$ , czyli  $b_n$ , jest sumą liczb Stirlinga drugiego rodzaju i jest liczbą wszystkich pogrupowań  $n$  obiektów:

$$b_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}, \quad (4.4.6)$$

czyli  $b_n = |\Pi(X)|$ .

#### Przykład 4.4.3

Zbiór trzeylementowy  $\{a, b, c\}$  ma 5 podziałów:  $\{a, b, c\}$ ,  $\{\{a\}, \{b, c\}\}$ ,  $\{\{b\}, \{a, c\}\}$ ,  $\{\{c\}, \{a, b\}\}$ ,  $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ , czyli  $b_3 = 5$ .

#### Przykład 4.4.4

Policzmy, na ile sposobów można podzielić 4 osoby na grupy. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia czwartej liczby Bella. Korzystając ze wzoru 4.4.6 oraz z przykładów 4.4.1 i 4.4.2, znajdziemy  $b_4$ .

$$\begin{aligned} b_4 &= \sum_{k=0}^4 \left\{ \begin{matrix} 4 \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} \\ &= 0 + 1 + 7 + 6 + 1 = 15. \end{aligned}$$

Oznacza to, że 4 osoby możemy podzielić na grupy na 15 sposobów.

Dla liczb Bella mamy związek rekurencyjny:

$$b_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} b_i,$$

gdzie  $b_0 = 0$ .

#### Twierdzenie 4.4.7

Jeśli  $|X| = n$  oraz  $|Y| = m$ ,  $m \leq n$ , to liczba wszystkich funkcji  $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$  jest równa:

$$s_{nm} = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n. \quad (4.4.7)$$

*Dowód.* Niech  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  oraz niech  $A_i = \{f : y_i \notin f(X)\}$ . Wtedy:

$$f(X) = Y \iff f \notin \bigcup_{i=1}^m A_i.$$

Wszystkich funkcji  $f : X \rightarrow Y$  jest  $m^n$  (twierdzenie 2.1.1). Szukamy więc  $|A_1 \cup \dots \cup A_m|$ . Aby skorzystać z twierdzenia 4.3.1, trzeba znać liczebność iloczynu  $A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j}$  dla dowolnego ciągu liczb  $1 \leq k_1 < \dots < k_j \leq m$ . Iloczyn ten jest zbiorem wszystkich funkcji  $f : X \rightarrow Y \setminus \{y_{k_1}, \dots, y_{k_j}\}$ , więc jego liczebność wynosi  $(m-j)^n$ . Ciąg  $1 \leq k_1 < \dots < k_j \leq m$  można wybrać na  $\binom{m}{j}$  sposobów, więc:

$$\begin{aligned} s_{nm} &= m^n - \left| \bigcup_{j=0}^{m-1} A_j \right| = m^n - \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n, \end{aligned}$$

co dowodzi wzoru (4.4.7).  $\square$

Pokażemy teraz, że:

$$s_{nk} = k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (4.4.8)$$

Zauważmy, że każdej funkcji  $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$  można przyporządkować podział zbioru  $X$  na  $k$  bloków, definiując go jako:

$$N(f) = \{f^{-1}(\{y\}) : y \in Y\},$$

oraz każdemu podziałowi  $\pi \in \Pi_k(X)$  odpowiada dokładnie  $k!$  funkcji z  $X$  na  $Y$ , dla których  $N(f) = \pi$ . Każda z tych funkcji przyporządkowuje wzajemnie jednoznacznie blokom podziału  $\pi$  elementy zbioru  $Y$ , co daje wzór (4.4.8). Stąd wniosek, że prawa strona wzoru (4.4.7) jest równa prawej stronie wzoru (4.4.8).

## 4.5. Podziały liczb

Zakładamy, że  $n, k \in \{1, 2, \dots\}$ . Na ile sposobów można zapisać liczbę  $n$  w postaci sumy  $k$  składników:

$$n = a_1 + \dots + a_k,$$

gdzie  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k > 0$ ? Każdy taki ciąg składników  $a_1, \dots, a_k$  nazywamy *podziałem liczby  $n$  na  $k$  składników*.

Oznaczenia:

$P(n, k)$  – liczba podziałów liczby  $n$  na  $k$  składników,

$P(n)$  – liczba wszystkich podziałów liczby  $n$ .

#### Przykład 4.5.1

Zbiór podziałów liczby 6:

```

6
5 1
4 2
4 1 1
3 3
3 2 1
3 1 1 1
2 2 2
2 2 1 1
2 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1

```

Stąd  $P(6, 1) = 1$ ,  $P(6, 2) = 3$ ,  $P(6, 3) = 3$ ,  $P(6, 4) = 2$ ,  $P(6, 5) = 1$ ,  $P(6, 6) = 1$ , czyli  $P(6) = 11$ .

Diagram  
Ferrersa

Dla podziału  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$  tworzymy diagram, nazywany *diagramem Ferrersa*<sup>18</sup>. Ma on  $k$  wierszy i zawiera  $a_i$  punktów w  $i$ -tym wierszu.

#### Przykład 4.5.2

Dla liczby 10 mamy  $10 = 5 + 3 + 2$ . Stąd diagram Ferrersa dla tego podziału liczby 10 ma postać:

```

• • • • •
• • •
• •

```

Diagram  
sprzężony

*Podział sprzężony* otrzymujemy, transponując, to znaczy zamieniając miejscami wiersze i kolumny diagramu Ferrersa.

#### Przykład 4.5.3

Diagram Ferrersa dla podziału sprzężonego liczby 10 ma postać:

```

• • •
• • •
• •
•
•

```

Stąd podział sprzężony podziału liczby  $10 = 5 + 3 + 2$  to  $10 = 3 + 3 + 2 + 1 + 1$ .

Transpozycja diagramu Ferrersa daje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie między podziałami liczby  $n$  na  $k$  składników a podziałami tej liczby o największym składniku równym  $k$ . Stąd otrzymujemy poniższe twierdzenie.

#### Twierdzenie 4.5.1

*Liczba podziałów liczby  $n$  na  $k$  składników jest równa liczbie podziałów liczby  $n$ , w których największy składnik równy jest  $k$ .*

Liczbę podziałów liczby  $n$  na  $k$  składników można też znaleźć, korzystając z zależności rekurencyjnej:

$$P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k)$$

dla  $n \geq k > 0$  oraz  $P(0, 0) = P(0) = 1$ .

#### Przykład 4.5.4

W podziale liczby 10 na trzy składniki największy składnik może być równy 8. Odpowiedni diagram Ferrersa:



Dla podziału liczby 10 na trzy składniki otrzymujemy więc na podstawie twierdzenia 4.5.1 osiem podziałów:

$$8 + 1 + 1,$$

$$7 + 2 + 1,$$

$$6 + 3 + 1,$$

$$6 + 2 + 2,$$

$$5 + 4 + 1,$$

$$5 + 3 + 2,$$

$$4 + 3 + 3,$$

$$4 + 4 + 2.$$

## 4.6. Zadania

**4.1.** Ile dzielników ma liczba 216000?

**4.2.** Ile jest liczb całkowitych w zbiorze  $X = \{1, 2, \dots, 2000\}$ , które są podzielne przez 9, 11, 13 lub 15?

**4.3.** W pewnej grupie 10 osób gra w brydża, 15 osób gra w szachy i 12 osób gra w monopol. Spośród nich 5 osób gra w brydża i szachy, 4 osoby grają w szachy i monopol, 3 osoby grają w brydża i monopol, a 2 osoby grają we wszystkie trzy gry. Ile osób jest w tej grupie?

**4.4.** W grupie 30 studentów 20 lubi grać w piłkę nożną, 15 w koszykówkę, a kilku w siatkówkę. W piłkę nożną i koszykówkę lubi grać 10 osób, w piłkę nożną i siatkówkę 3, a w koszykówkę i siatkówkę 2. Tylko jedna osoba lubi grać we wszystkie trzy gry. Ile osób lubi grać w siatkówkę?

**4.5.** W pewnej grupie osób 45 regularnie pływa, 40 jeździ na rowerze, a 50 biega. Wiemy ponadto, że są 32 osoby, które biegają, ale nie jeżdżą na rowerze, 27 takich, które biegają i pływają, oraz 10 uprawiających wszystkie trzy rodzaje aktywności. Ile osób biega, ale nie pływa i nie jeździ na rowerze?

**4.6.** Na ile sposobów można rozbić zbiór dziesięcioelementowy na zbiory dwuelementowe, a na ile sposobów można rozbić zbiór  $2n$ -elementowy na takie podzbiory?

**4.7.** Na pewnej wyspie mieszka 300 dzikusów, z których każdy jest matematykiem, filozofem lub ludożercą. Połowa ludożerców zajmuje się filozofią, połowa filozofów to matematycy, a połowa matematyków to ludożercy. Wiedząc, że żaden z ludożerców nie zajmuje się filozofią i matematyką jednocześnie, ustalić, z ilu osób składa się każda z tych grup.

**4.8.** Worek zawiera 50 szklanych kulek w czterech różnych kolorach. Uzasadnić, że musi być co najmniej 13 kulek tego samego koloru.

**4.9.** W grupie 100 wysportowanych studentów 85 gra w piłkę nożną, 80 w tenisa, 70 w siatkówkę, 66 biega. Czy wśród studentów znajduje się taki, który trenuje wszystkie te dyscypliny sportowe?

**4.10.** Czy szachownicę  $8 \times 8$  z dwoma wyciętymi przeciwległymi narożnymi polami można pokryć kostkami domina  $2 \times 1$ ?

**4.11.** W biegu bierze udział 6 zawodników ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 6. Na ile sposobów może zakończyć się ten bieg tak, aby żaden z zawodników nie zajął miejsca zgodnego ze swoim numerem?

- 4.12.** Napisać trójkąt podobny do trójkąta Pascala, którego elementami są liczby Stirlinga drugiego rodzaju.
- 4.13.** Na ile sposobów można rozdać 8 książek 4 osobom?
- 4.14.** Na ile sposobów można podzielić 5 osób na grupy?
- 4.15.** Na ile sposobów da się utworzyć trzy rozłączne komisje z osób wybranych z dwudziestoosobowej grupy, jeśli muszą one mieć odpowiednio 3, 5 i 7 członków?
- 4.16.** Na ile sposobów można podzielić dziewiętnastu studentów na pięć zespołów, w tym dwa zespoły po pięć i trzy zespoły po trzy osoby tak, że każdy zespół studiuje inny spośród pięciu danych tematów?
- 4.17.** Na ile sposobów można podzielić grupę  $3n$  zawodników na  $n$  drużyn po 3 zawodników w każdej?
- 4.18.** Ile jest liczb całkowitych między 1000 a 9999, których suma cyfr wynosi dokładnie  $9^2$ ?
- 4.19.** Nauczyciel przeprowadził kartkówkę dla pięciu uczniów. Kartkówki chce rozdać do sprawdzenia samym uczniom. Na ile sposobów może to zrobić tak, żeby żaden z uczniów nie dostał do sprawdzenia swojej pracy?
- 4.20.** Na ile sposobów można rozdać 7 różnych płyt dwóm osobom?
- 4.21.** Ile jest surjekcji ze zbioru ośmioelementowego na zbiór pięcioelementowy?
- 4.22.** Wyznaczyć liczbę wszystkich możliwych podziałów zbioru sześćelementowego.

## 5. Funkcje tworzące

### 5.1. Szeregi formalne

W zagadnieniach kombinatorycznych polegających na wyznaczeniu liczby obiektów spełniających pewne ograniczenia szukany rozwiązaniem jest często ciąg  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , gdzie  $a_k$  jest liczbą poszukiwanych obiektów „wymiaru”  $k$ . Jeśli na przykład chcemy wiedzieć, na ile sposobów można podzielić liczbę  $n$  na sumę  $k$  składników, to możemy przyjąć  $a_k = P(n; k)$ ; jeśli poszukujemy liczby podzbiorów pewnego ustalonego zbioru  $n$ -elementowego, to  $a_k = \binom{n}{k}$ .

Niech  $a_k$  będzie ciągiem liczbowym. *Funkcją tworzącą* (ang. *generating function*) nazywa się szereg formalny:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (5.1.1)$$

Nieskończony ciąg liczbowy  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$  formalnie reprezentujemy szeregiem potęgowym  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Oznacza to, że:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

jest formalnym przypisaniem ciągowi funkcji  $A(x)$ , o ile szereg potęgowy jest zbieżny\*. Nazwa „szereg formalny” oznacza, że wzór (5.1.1) określa takie własności szeregów jak ich dodawanie, mnożenie, mnożenie przez liczbę, natomiast nie bada się ich zbieżności.

Wykładnicza  
funkcja  
tworząca

Szereg formalny

$$\hat{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \quad (5.1.2)$$

---

\*Informacje o rozwinięciu funkcji w szereg potęgowy i jego zbieżności można znaleźć w dodatku A.4.

nazywa się *wykładniczą funkcją tworzącą* (ang. *exponential generating function*).

*Operacje na szeregach*

Dla szeregów  $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  i  $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  określone są następujące operacje:  
*dodawanie szeregów:*

$$A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k,$$

*mnożenie szeregu przez liczbę:*

$$\alpha A(x) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

*mnożenie szeregów:*

$$A(x) B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

gdzie:

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}. \quad (5.1.3)$$

Wzór (5.1.3) definiuje splot  $\{c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\}$  ciągów  $\{a_k\}$  i  $\{b_k\}$ . Jeżeli szereg (5.1.1) jest zbieżny do funkcji  $f(x) = A(x)$  dla pewnego promienia zbieżności  $r > 0$ , to będziemy utożsamiać szereg formalny (5.1.1) z funkcją  $f(x)$  również dla  $|x| > r$ . Wtedy:

$$A'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

### Przykład 5.1.1

1. Dla ciągu złożonego z samych jedynek, to znaczy o wyrazach  $a_k = 1$ , funkcją tworzącą jest:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

2. Dla ciągu współczynników dwumianowych, to znaczy o wyrazach  $a_k = \binom{n}{k}$  dla ustalonego  $n$ , funkcją tworzącą jest:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

3. Dla ciągu naprzemiennego o wyrazach  $a_k = (-1)^k$ , funkcją tworzącą jest:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}.$$

4. Dla ciągu o wyrazach  $a_k = 2^k$  funkcją tworzącą jest:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \frac{1}{1-2x}.$$

5. Dla ciągu kolejnych liczb naturalnych, to znaczy o wyrazach  $a_k = k$ , funkcją tworzącą jest:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} kx^k &= x \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\ &= x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

6. Dla ciągu o wyrazach  $a_k = 1/k!$  funkcją tworzącą jest:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x.$$

Szereg jednostkowy  $I(x)$  to szereg spełniający równanie:

$$A(x) \cdot I(x) = I(x) \cdot A(x) = A(x).$$

Jest to szereg, w którym  $a_0 = 1$  oraz  $a_i = 0$  dla  $i \neq 0$ . Szereg odwrotny  $A^{-1}(x)$  to szereg, który spełnia warunek:

$$A(x) \cdot A^{-1}(x) = A^{-1}(x) \cdot A(x) = I(x).$$

Oczywiście  $I^{-1}(x) = I(x)$ . Szereg  $I(x)$  jest elementem neutralnym dla mnożenia szeregów.

### **Twierdzenie 5.1.1**

*Szereg (5.1.1) ma szereg odwrotny względem mnożenia wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyraz wolny jest różny od zera.*

### **Przykład 5.1.2**

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)^{-1} = 1 - x,$$

bo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

**Przykład 5.1.3**

Następującą tożsamość można udowodnić, korzystając z funkcji tworzących:

$$\binom{m+k}{k} = \sum_{s=0}^k \binom{m}{s} \binom{n}{k-s}.$$

Porównamy współczynniki przy  $x^n$  po obu stronach równości:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k &= (1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{s=0}^k \binom{m}{s} \binom{n}{k-s} x^k. \end{aligned}$$

**5.2. Rozwiązywanie rekurencji**

Funkcje tworzące są bardzo wygodnym narzędziem do rozwiązywania równań rekurencyjnych. Dla danego ciągu  $\{a_n\}$  spełniającego pewne równanie rekurencyjne:

$$a_n = f(a_n, \dots, a_{n-k}) \quad (5.2.1)$$

dla całkowitych  $n$  oraz pewnego  $k$ , przy czym  $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$ , chcemy znaleźć jawny wzór na  $a_n$  jako funkcję zmiennej  $n$ . Rozwiązanie jest następujące:

*Algorytm  
rozwiązywania*

1. Pomnożyć obie strony równania (5.2.1) przez  $x^n$  i zsumować po  $n$ . Otrzymana się wtedy równanie:

$$\sum_n a_n x^n = \sum_n f(a_n, \dots, a_{n-k}) x^n,$$

czyli równość postaci:

$$A(x) = h(A(x)). \quad (5.2.2)$$

2. Rozwiązać równanie (5.2.2) ze względu na  $A(x)$ .
3. Rozwinąć  $A(x)$  w szereg potęgowy. Współczynniki przy  $x^n$  są równe  $a_n$ .

*Liczby  
Fibonacciego*

Rozpatrzmy przykład z liczbami Fibonacciego<sup>19</sup> (patrz str. 20) w oparciu o powyższy schemat. Przypomnijmy, że liczby Fibonacciego są rekurencyjnie określone wzorem:

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0, \\ 1 & \text{dla } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{dla } n > 1. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

1. Równanie na funkcję tworzącą  $F(x)$ :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) x^n + x \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n + x \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} + x \\
 &= xF(x) + x^2 F(x) + x.
 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

2. Rozwiązanie równania na funkcję tworzącą  $F(x)$ :

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}. \tag{5.2.5}$$

3. Rozkładamy  $F(x)$  na ułamki proste (patrz dodatek A.3).

Pierwiastkami równania  $1 - x - x^2 = 0$  są  $a = (1 + \sqrt{5})/2$  oraz  $b = (1 - \sqrt{5})/2$ .

Rozkład na ułamki proste ma postać:

$$F(x) = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b}, \tag{5.2.6}$$

gdzie  $A = -1/\sqrt{5}$ , natomiast  $b = 1/\sqrt{5}$ . Po rozwinięciu w szereg potęgowy obu ułamków prostych otrzymujemy współczynniki  $f_k$ :

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right) \tag{5.2.7}$$

dla  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Przypomnijmy (przykład 1.3.14 na str. 22), że ciąg ten jest związany ze „złotym podziałem”.

Analogiczne podejście z wykorzystaniem funkcji tworzącej można stosować dla innych równań rekurencyjnych definiujących ciągi szczególnych liczb, w których występują stałe współczynniki:

$$a_n = A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2} + \dots + A_k a_{n-k}$$

dla  $n \geq k$ , gdzie  $k$  oraz  $A_1, A_2, \dots, A_k$  są ustalone oraz dane są warunki początkowe przez określenie wartości  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ .

### 5.3. Zastosowania funkcji tworzących

Funkcje tworzące są wykorzystywane do zliczania obiektów kombinatorycznych. Na przykład funkcja tworząca dla współczynników dwumianowych dla ustalonego  $n$  wyraża się wzorem (patrz przykład 5.1.1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Ma on prostą interpretację kombinatoryczną. Załóżmy, że  $X = \{e_1, \dots, e_n\}$ . W iloczynie  $(1+x)^n = (1+x) \dots (1+x)$   $i$ -ty czynnik  $(1+x)$  potraktujmy jako odpowiednik elementu  $e_i$ , reprezentujący liczbę wystąpień elementu  $e_i$  – zero razy ( $x^0 = 1$ ) i jeden raz ( $x^1 = x$ ). Rozumowanie to można uogólnić na przypadek zbiorów z powtórzeniami, wtedy  $i$ -ty czynnik  $(1+x+\dots+x^j)$  reprezentuje liczbę wystąpień elementu.

Na liczbę wystąpień  $e_i$  można nakładać ograniczenia. Pokazuje to następujące twierdzenie.

#### **Twierdzenie 5.3.1**

Niech  $X = \{e_1, \dots, e_n\}$  oraz niech  $a_k$  oznacza liczbę  $k$ -elementowych zbiorów  $A$  z powtórzeniami, o elementach z  $X$  takich, że dla dowolnego  $i = 1, \dots, n$  krotność elementu  $e_i$  należy do zbioru  $\{r_{i1}, r_{i2}, \dots\}$ , gdzie  $0 \leq r_{i1} \leq r_{i2}, \dots$ . Wtedy funkcja tworząca dla ciągu  $a_0, a_1, \dots$  ma postać:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (x^{r_{11}} + x^{r_{12}} + \dots) (x^{r_{21}} + x^{r_{22}} + \dots) \dots (x^{r_{n1}} + x^{r_{n2}} + \dots).$$

#### **Przykład 5.3.1**

Niech  $X = \{3 * a, 1 * b, 2 * c\}$  oraz niech  $a_k$  będzie liczbą podzbiorów  $k$ -elementowych tego zbioru. Wtedy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= (1+x+x^2+x^3)(1+x)(1+x+x^2) \\ &= 1+3x+5x^2+6x^3+5x^4+3x^5+x^6. \end{aligned}$$

Stąd liczba podzbiorów dwuelementowych wynosi 5.

**Przykład 5.3.2**

Jeżeli nie nakładamy żadnych ograniczeń na liczbę wystąpień  $e_i$ , to:

$$(1 + x + x^2 + \dots)^n = \frac{1}{(1 - x)^n}.$$

Rozwijając tę funkcję w szereg Maclaurina<sup>44</sup>, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k} (1 - x)^{-n} &= (-n) \dots (-n - k + 1) (1 - x)^{-n-k} (-1)^k \\ &= n^{\overline{k}} (1 - x)^{-n-k}. \end{aligned}$$

Stąd:

$$(1 - x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{\overline{k}}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k - 1}{k} x^k$$

(porównaj twierdzenie 3.3.1).

Jeżeli liczba wystąpień ma być różna od zera, to funkcja tworząca będzie równa:

$$(x + x^2 + \dots)^n = \frac{x^n}{(1 - x)^n}.$$

Dla wykładniczych funkcji tworzących odpowiednikiem twierdzenia 5.3.1 jest następujący wynik.

**Twierdzenie 5.3.2**

Niech  $X = \{e_1, \dots, e_n\}$  oraz niech  $a_k$  oznacza liczbę  $k$ -elementowych ciągów o elementach z  $X$  takich, że dla  $i = 1, \dots, n$  liczba wystąpień elementu  $e_i$  należy do zbioru  $\{r_{i1}, r_{i2}, \dots\}$ , gdzie  $0 \leq r_{i1} \leq r_{i2}, \dots$ . Wtedy wykładnicza funkcja tworząca dla ciągu  $a_0, a_1, \dots$  jest równa:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!} = \left( \frac{x^{r_{11}}}{r_{11}!} + \frac{x^{r_{12}}}{r_{12}!} + \dots \right) \left( \frac{x^{r_{21}}}{r_{21}!} + \frac{x^{r_{22}}}{r_{22}!} + \dots \right) \\ &\quad \dots \left( \frac{x^{r_{n1}}}{r_{n1}!} + \frac{x^{r_{n2}}}{r_{n2}!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Przy konstrukcji funkcji tworzącej dla liczby podzbiorów  $k$ -elementowych zbioru z powtórzeniami można nakładać dodatkowe warunki na liczbę wystąpień elementu  $e_i$ .

**Przykład 5.3.3**

Zbiorem z powtórzeniami można narzucić dodatkowe warunki:

1. element  $e_i$  musi wystąpić przynajmniej raz, wtedy czynnik odpowiadający elementowi  $e_i$ :

$$(x + x^2 + x^3 + \dots) = \frac{x}{1 - x};$$

2. element  $e_i$  nie występuje lub występuje parzystą liczbę razy, wtedy czynnik odpowiadający elementowi  $e_i$ :

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots) = \frac{1}{1 - x^2};$$

3. element  $e_i$  występuje nieparzystą liczbę razy, wtedy czynnik odpowiadający elementowi  $e_i$ :

$$(x + x^3 + x^5 + \dots) = \frac{x}{1 - x^2};$$

4. element  $e_i$  występuje dowolną liczbę razy (brak warunków), wtedy czynnik odpowiadający elementowi  $e_i$ :

$$\begin{aligned} A(x) &= (1 + x + x^2 + \dots) \cdot \dots \cdot (1 + x + x^2 + \dots) \\ &= \frac{1}{1 - x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{(1 - x)^n}. \end{aligned}$$

## 5.4. Sploty

Liczby

Fibonacciego

Splot Fibonacciego<sup>19</sup>. Znajdziemy wzór na:

$$g_n = \sum_{k=0}^n f_k f_{n-k},$$

gdzie  $f_k$  jest  $k$ -tą liczbą Fibonacciego. Ciąg  $\{g_n\}$  jest splotem ciągu  $\{f_n\}$  ze sobą. Liczby Fibonacciego mają funkcję tworzącą daną wzorem (5.2.5):

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Liczby  $g_n$  mają zaś funkcję tworzącą:

$$G(x) = (F(x))^2 = \frac{x^2}{(1 - x - x^2)^2}.$$

Rozwinięcie funkcji  $G(x)$  możemy otrzymać ze wzoru (5.2.6):

$$\begin{aligned} G(x) &= (F(x))^2 = \left( \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right)^2 \\ &= \frac{A^2}{(x-a)^2} + \frac{B^2}{(x-b)^2} + \frac{2AB}{(x-a)(x-b)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że:

$$\frac{1}{(t-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) t^n,$$

skąd po podstawieniu  $t = x/a$  i  $t = x/b$  dostajemy odpowiednio rozwinięcia dwóch pierwszych ułamków. Trzeci ułamek rozwijamy analogicznie jak funkcję  $F(x)$ . Stąd:

$$G(x) = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a^n x^n - \frac{2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n + \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b^n x^n.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$g_n = \sum_{k=0}^n f_k f_{n-k} = \frac{2nf_{n+1} - (n+1)f_n}{5}.$$

Innym znanym zastosowaniem jest *zrównoważony ciąg binarny* długości  $2n$ . Jest to ciąg zawierający  $n$  zer oraz  $n$  jedynek o tej własności, że dla każdego  $k$ ,  $1 \leq k \leq 2n$  na początkowych  $k$  pozycjach liczba zer jest nie mniejsza niż liczba jedynek.

#### Przykład 5.4.1

- Da  $n = 1$  istnieje jeden ciąg zrównoważony długości 2. Jest nim (01).
- Dla  $n = 2$  istnieją dwa ciągi zrównoważone długości 4. Są nimi ciągi (0011) i (0101).
- Dla  $n = 3$  istnieje pięć ciągów zrównoważonych długości 6. Są nimi ciągi (000111), (001101), (010101), (010011) i (001011).

Liczby  
Catalana

Liczby  $c_n$  zrównoważonych ciągów binarnych długości  $2n$  nazywają się liczbami Catalana<sup>7</sup>. Zostały one wprowadzone w XVIII wieku przez L. Eulera, który badał liczbę podziałów wielokątów na trójkąty, ale nazwę zyskały na cześć E. Ch. Catalana, który rozważał je jako liczbę sposobów rozmieszczeń nawiasów.

#### Przykład 5.4.2

Liczba Catalana  $c_n$  jest więc liczbą możliwych rozmieszczeń nawiasów w iloczynie liczb  $x_0 x_1 \dots x_n$  dla  $n \geq 0$  tak, aby kolejność operacji mnożenia dwóch liczb była wyznaczona jednoznacznie. Każdy nawias zamykający musi wystąpić po otwierającym. Stąd liczba nawiasów zamykających do podanej pozycji jest nie większa niż liczba nawiasów otwierających do tej pozycji. Tak jak w przykładzie 5.4.1:

- $c_2 = 2$ , ponieważ istnieją dwie możliwości rozmieszczenia nawiasów:  $(x_0 x_1) x_2$ ,  $x_0 (x_1 x_2)$ ,
- $c_3 = 5$ , ponieważ istnieje pięć możliwości rozmieszczenia nawiasów:  $x_0 ((x_1 x_2) x_3)$ ,  $x_0 (x_1 (x_2 x_3))$ ,  $(x_0 x_1) (x_2 x_3)$ ,  $((x_0 x_1) x_2) x_3$ ,  $(x_0 (x_1 x_2)) x_3$ .

Ogólnie dla  $k > 0$ :

$$c_k = c_0 c_{k-1} + c_1 c_{k-2} + \cdots + c_{k-1} c_0. \quad (5.4.1)$$

Wzór (5.4.1) jest też wzorem rekurencyjnym, gdy przyjmiemy  $c_0 = 1$ . Niech

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

będzie funkcją tworzącą dla ciągu określonego wzorem (5.4.1). Ponieważ prawa strona wzoru (5.4.1) jest splotem ciągu  $\{c_i\}$  z przesuniętym ciągiem  $c'_i = c_{i-1}$ ,  $c'_0 = 0$ , to:

$$C(x) = xC^2(x) + 1,$$

a więc:

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0.$$

Rozwiązując to równanie ze względu na  $C(x)$ , otrzymujemy dla  $x \neq 0$ :

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}. \quad (5.4.2)$$

Rozwijając  $(1-4x)^{1/2}$  w szereg Maclaurina<sup>44</sup>, dostajemy:

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k.$$

Aby otrzymać rozwiązanie o dodatnich współczynnikach, należy w (5.4.2) wybrać znak minus. Stąd:

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} x^k. \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (5.4.3)$$

Liczby Catalana mają wiele interpretacji kombinatorycznych. Liczba drzew binarnych (patrz paragrafy 1.3 oraz 7.3) o  $n$  wierzchołkach jest równa  $n$ -tej liczbie Catalana. Liczba dróg zaczynających się w początku układu współrzędnych i kończących się w  $(0, 2n)$  położonych w pierwszej ćwiartce i złożonych z pojedynczych odcinków o początku  $(x, y)$  oraz końcu w punkcie  $(x+1, y+1)$  lub  $(x-1, y-1)$ ,  $x, y \in \mathbb{N}$ , jest  $n$ -tą liczbą Catalana. Podobnie liczba monotonicznych dróg w kwadracie  $n \times n$ .

Ze wzoru (5.4.3) można dla  $n \geq 0$  otrzymać prosty wzór rekurencyjny:

$$c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n. \quad (5.4.4)$$

## 5.5. Zadania

**5.1.** Wyznaczyć liczbę podzbiorów jedenastoelementowych zbioru z powtórzeniami  $\{4 * a, 3 * b, 7 * c\}$ .

**5.2.** Na ile sposobów można zbudować kolumnę rozmiaru  $2 \times 2 \times n$  z cegieł rozmiaru  $2 \times 2 \times 1$ ?

**5.3\*.** Ciąg  $a_n$  jest określony wzorem rekurencyjnym postaci  $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$ , przy czym  $a_1 = 1$  oraz  $a_2 = 3$ . Znaleźć funkcję tworzącą tego ciągu i wyznaczyć jawne wzory na  $a_n$ .

**5.4\*.** Liczby Fibonacciego drugiego rodzaju  $F_n$  są określone następująco:  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  oraz  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} + f_{n+1}$  dla  $n > 0$ . Podać  $F_n$  jako funkcję liczb Fibonacciego  $f_n$ .

**5.5.** Niech  $a_k$  będzie liczbą funkcji różnowartościowych ze zbioru  $k$ -elementowego w zbiór  $n$ -elementowy. Znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu  $a_k$  i obliczyć  $a_k$ .

**5.6\*.** Niech  $b_n$  będą liczbami Bella (patrz wzór (4.4.6)). Udowodnić, że:

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k}$$

i, korzystając z tej rekurencji, znaleźć wykładniczą funkcję tworzącą dla liczb Bella.

**5.7.** Pokazać, że liczby Catalana mają własność:

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2.$$

**5.8.** Korzystając ze wzoru Stirlinga (2.2.1), pokazać, że:

$$c_n \sim \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}.$$

## **Część II**

# **Grafy**

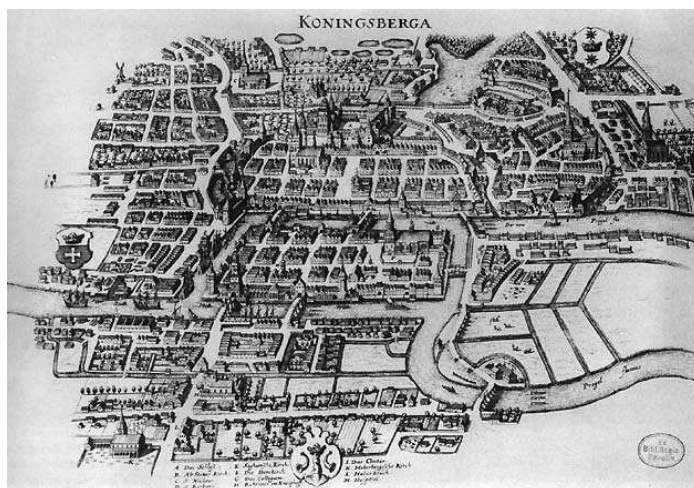


## 6. Elementy teorii grafów

### 6.1. Podstawowe pojęcia

*Mosty  
królewieckie*

*Graf* przedstawia pewien zbiór punktów i pokazuje, w jaki sposób są one połączone. Jest strukturą matematyczną służącą do opisu i badania relacji między obiektami. Za pierwszego teoretyka i badacza grafów uważa się Leonharda Eulera<sup>16</sup>, który za pomocą grafów rozwiązał w 1736 roku problem mostów królewieckich (rysunek 6.1, schemat połączeń na rysunku 6.2) oraz sformułował problem bardziej ogólny i podał jego rozwiązanie. Rozwiązanie tego zagadnienia jest uznawane za pierwszą pracę na temat teorii grafów.

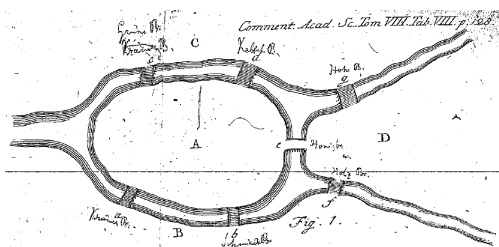


Rysunek 6.1. Mosty królewieckie

W pracy *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*\* Euler sformułował problem:

*Czy można po siedmiu mostach łączących dzielnicę miasta z wyspą na Pregole odbyć spacer w ten sposób, by przejść kolejno przez wszystkie mosty, nie przechodząc po żadnym z nich więcej niż jeden raz?*

Odpowiedź jest negatywna (uzasadnienie w punkcie 7.1 na str. 120).



Rysunek 6.2. Mosty królewieckie – schemat układu mostów, reprodukcja z oryginalnego artykułu Eulera

*Graf nieskierowany*

Graf (graf nieskierowany, graf niezorientowany)  $G = (V, E)$  składa się z niepustego, skończonego zbioru wierzchołków (ang. *vertices*, *nodes*)  $V(G)$  i skończonego zbioru

$$E(G) = \{\{v_i, v_j\} : i \neq j, v_i, v_j \in V\}.$$

Zbiory dwuelementowe nazywamy *krawędziami* (ang. *edges*, *lines*), a jednoelementowe *pętlami* (ang. *loops*). Wierzchołki  $u$  oraz  $v$  nazywamy końcami krawędzi  $\{u, v\} \in E$ .

*Multigraf*

Powtarzające się krawędzie lub pętle (gdy  $E$  jest multizbiorem) nazywamy wielokrotnymi lub równoległymi. Graf bez krawędzi wielokrotnych i pętli nazywamy *grafem prostym*. Graf, który ma wielokrotne krawędzie lub pętle, nazywamy *multigrafem*. *Droga* w grafie to naprzemienny zbiór wierzchołków i krawędzi  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_n, e_n$ .

*Droga*

Jeżeli graf jest prosty, to droga jest jednoznacznie zdefiniowana przez ciąg wierzchołków lub ciąg krawędzi. *Droga prosta* (ang. *path*) to droga, w której nie powtarzają się żadne elementy (wszystkie wierzchołki są różne). Drogę prostą o  $n$  wierzchołkach oznaczmy przez  $P_n$ .

*Cykl*

*Cykl* (ang. *cycle*, *circut*) to droga, w której  $v_0 = v_n$ . Liczbę krawędzi w drodze prostej lub w cyklu prostym nazywa się długością drogi lub

\*L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, vol. 8, 1741, s. 128–140.

cyklu. *Cykl prosty* to cykl, w którym nie powtarzają się żadne elementy (wszystkie wierzchołki są różne). Cykl prosty o  $n$  wierzchołkach oznaczmy przez  $C_n$ . *Obwodem* (ang. *girth*) w grafie nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie. Graf, który nie zawiera cykli, nazywa się *grafem acyklicznym*.

*Graf spójny*

Graf, w którym istnieje droga z każdego wierzchołka do każdego innego, nazywa się *grafem spójnym* (ang. *connected graph*).

*Drzewo*

Graf acykliczny i spójny nazywa się *drzewem* (ang. *tree*). Wierzchołek drzewa, który jest końcem tylko jednej krawędzi, nazywa się *liściem*. *Korzeń* drzewa to dowolny wyróżniony jego wierzchołek. Długość najdłuższej drogi od korzenia do liścia to *wysokość drzewa*. Drzewo o  $n$  wierzchołkach i wysokości 1, czyli składające się tylko z korzenia i z  $n - 1$  liści, nazwiemy *gwiazdą* i oznaczmy przez  $S_n$ .

Graf, w którym dowolne dwa wierzchołki należą do pewnego cyklu prostego, nazywa się *grafem silnie spójnym*.

### Przykład 6.1.1

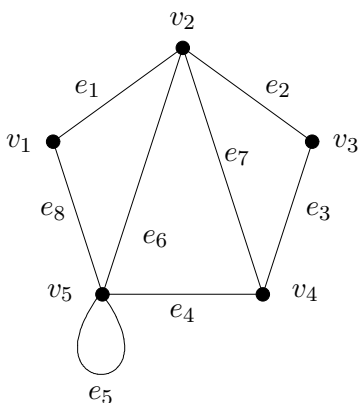
Graf  $G$  z rysunku 6.3 ma 5 wierzchołków:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

oraz 8 krawędzi:

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}.$$

Jest grafem spójnym. Droga to na przykład zbiór wierzchołków i krawędzi:  $\{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5\}$  lub prościej  $\{v_1, e_2, e_3, e_4\}$ . Cyklem jest na przykład zbiór  $\{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_8, v_1\}$  lub krócej  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_8\}$ . Krawędź  $e_5$  jest pętlą.



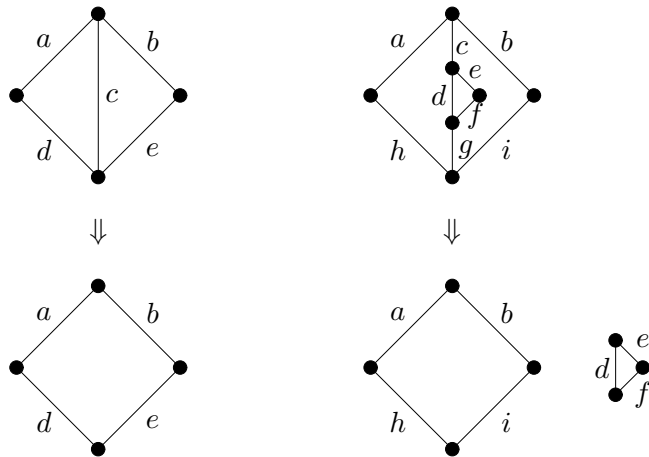
Rysunek 6.3. Graf do przykładu 6.1.1

**Twierdzenie 6.1.1**

*Różnica symetryczna (patrz dodatek A.2) dwóch cykli jest cyklem lub sumą cykli rozłącznych krawędziowo.*

**Przykład 6.1.2**

Na rysunku 6.4 widać, że różnica symetryczna dwóch cykli jest cyklem lub sumą cykli rozłącznych krawędziowo.



Rysunek 6.4. Różnica symetryczna dwóch cykli w grafach  $G_1$  (po lewej) i  $G_2$  (po prawej)

W grafie  $G_1$  oznaczmy cykle  $C_1 = \{a, c, d\}$ ,  $C_2 = \{b, c, e\}$ . Wtedy  $C_1 \Delta C_2 = \{a, b, d, e\}$  jest cyklem. W grafie  $G_2$  oznaczmy cykle  $C_1 = \{a, c, d, g, h\}$ ,  $C_2 = \{b, c, e, f, g, i\}$ . Wtedy  $C_1 \Delta C_2 = \{a, b, d, e, f, h, i\}$  jest sumą dwóch cykli.

*Graf skierowany*

*Graf skierowany* – czyli *zorientowany*, zwany też *digrafem* (ang. *digraph* = *directed graph*) –  $G = (V, E)$  składa się ze zbioru wierzchołków  $V$  i zbioru par wierzchołków  $E$ . Pary postaci  $(u, v)$ , gdzie  $u \neq v$ , nazywamy *łukami* (ang. *arcs*), a pary postaci  $(u, u)$  – *pętlami* (ang. *loops*). Powtarzające się łuki lub pętle (gdy  $E$  jest multizbiorem) nazywamy wielokrotnymi lub równoległymi. Digraf bez łuków wielokrotnych i pętli nazywamy *digrafem prostym*. Digraf, który ma wielokrotne łuki lub pętle, nazywamy *multigrafem skierowanym*.

Dla grafu nieskierowanego  $G = (V, E)$  i krawędzi  $e = \{v_i, v_j\} \in E$  mówimy, że wierzchołki  $v_i, v_j$  są *incydentne* z krawędzią  $e$ . Inaczej

mówiąc, wierzchołki  $v_i, v_j$  są końcami krawędzi  $e$ , to znaczy  $v_i \in e$ ,  $v_j \in e$ . Wierzchołki incydentne z daną krawędzią nazywamy *sąsiedniemi* (ang. *adjacent*). Innymi słowy, dwa wierzchołki grafu  $G$  są sąsiednie, jeśli istnieje krawędź, która je łączy. Dwie krawędzie są sąsiednie (incydentne), jeśli mają wspólny wierzchołek, a także wierzchołek jest incydentny z krawędzią, gdy jest jej końcem.

Niech  $\Gamma(v) = \{v \in V : \{v, u\} \in E, v \neq u\}$  będzie zbiorem wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem  $v$ . Dla grafu prostego  $d(v) = |\Gamma(v)|$  jest stopniem wierzchołka  $v$ .

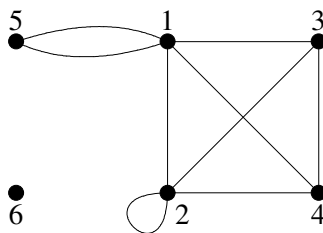
*Stopień wierzchołka*

*Stopień* wierzchołka  $v$  multigrafu  $G$  jest liczbą krawędzi incydentnych z  $v$ . *Wierzchołek izolowany* to wierzchołek stopnia 0. *Wierzchołek końcowy* lub *liść* (ang. *leaf*) to wierzchołek stopnia 1. *Pętla* w wierzchołku  $v$  powiększa stopień tego wierzchołka o 2.

### Przykład 6.1.3

Dla grafu  $G$  z rysunku 6.5 mamy następujące stopnie:

$$d(1) = 5, d(2) = 5, d(3) = 3, d(4) = 3, d(5) = 2, d(6) = 0.$$



Rysunek 6.5. Multigraf do przykładu 6.1.3

Dla digrafu  $G = (V, E)$  i jego łuku  $e = (u, v) \in E$  mówimy, że wierzchołki  $u, v$  są incydentne z łukiem  $e$ , przy czym  $u$  jest początkiem, a  $v$  – końcem łuku  $e$ .

Przyjmujemy oznaczenia:

$V^+(u) = \{v \in V : (u, v) \in E\}$  – zbiór końców łuków wychodzących z wierzchołka  $u$ ,

$V^-(u) = \{v \in V : (v, u) \in E\}$  – zbiór początków łuków wchodzących do wierzchołka  $u$ ,

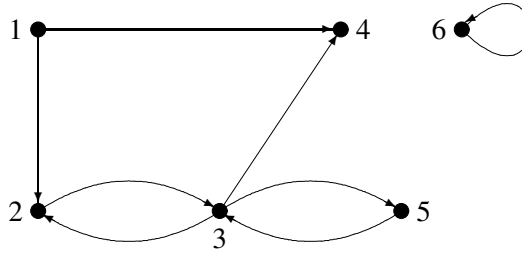
$|V^+(u)| = d^+(u)$  – *stopień wyjściowy* (ang. *outdegree*) wierzchołka  $u$ ,

$|V^-(u)| = d^-(u)$  – stopień wejściowy (ang. *indegree*) wierzchołka  $u$ ,

$d^+(u) + d^-(u) = d(u)$  – stopień wierzchołka  $u$ .

#### Przykład 6.1.4

Dla grafu skierowanego  $G$  z rysunku 6.6:



Rysunek 6.6. Multigraf skierowany do przykładu 6.1.4

$V^+(1) = \{2, 4\} \Rightarrow d^+(1) = 2$ ,  $V^-(1) = \emptyset \Rightarrow d^-(1) = 0$  i stąd  $d(1) = 2$ ;

$V^+(2) = \{3\} \Rightarrow d^+(2) = 1$ ,  $V^-(2) = \{1, 3\} \Rightarrow d^-(2) = 2$  i stąd  $d(2) = 3$ ;

$V^+(3) = \{2, 4, 5\} \Rightarrow d^+(3) = 3$ ,  $V^-(3) = \{2, 5\} \Rightarrow d^-(3) = 2$  i stąd  $d(3) = 5$ ;

$V^+(4) = \emptyset \Rightarrow d^+(4) = 0$ ,  $V^-(4) = \{1, 3\} \Rightarrow d^-(4) = 2$  i stąd  $d(4) = 2$ ;

$V^+(5) = \{3\} \Rightarrow d^+(5) = 1$ ,  $V^-(5) = \{3\} \Rightarrow d^-(5) = 1$  i stąd  $d(5) = 2$ ;

$V^+(6) = \{6\} \Rightarrow d^+(6) = 1$ ,  $V^-(6) = \{6\} \Rightarrow d^-(6) = 1$  i stąd  $d(6) = 2$ .

*Lemat  
o uściskach  
dłoni*

W 1736 roku L. Euler<sup>16</sup> udowodnił wzór, zwany *lematem o uściskach dłoni*, który mówi, że w każdym grafie suma stopni wszystkich wierzchołków jest liczbą parzystą i jest równa podwojonej liczbie krawędzi, gdyż każda krawędź zwiększa tę sumę o 2. Uzasadnienie tego faktu jest bardzo proste. Jeśli pewne osoby witają się, podając sobie dłonie, to łącznie liczba ściśniętych dłoni jest parzysta – dlatego że w każdym uścisku uczestniczą dokładnie dwie dłonie. Oznacza to, że dla dowolnego grafu nieskierowanego  $G = (V, E)$  zachodzi wzór:

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|.$$

Natychmiastowym wnioskiem z lematu o uściskach dłoni jest twierdzenie, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest parzysta.

*Podgraf*      *Podgrafem* (ang. *subgraph*) grafu  $G = (V, E)$  nazywamy dowolny graf  $G' = (V', E')$ , dla którego  $V' \subseteq V$  oraz  $E' \subseteq E$ . Z definicji grafu wynika, że  $E'$  zawiera tylko takie krawędzie (łuki), które zawierają wierzchołki należące do  $V'$ . Maksymalny podgraf spójny nazywamy *składową spójną* (ang. *connected component*). W grafie skierowanym maksymalny podgraf silnie spójny nazywamy *składową silnie spójną*.

## 6.2. Macierze grafów

Reprezentowanie grafów jako macierzy jest uznawane za nie najlepszy sposób ich przedstawiania w postaci programów komputerowych. Wygodniejsze jest przedstawianie grafów w postaci list (patrz na przykład [13]). Są jednak co najmniej dwa powody, aby macierzowe reprezentacje grafów omówić nieco obszerniej. Pierwszy powód, czyisto matematyczny, to elegancja przedstawienia grafu i naturalna możliwość uogólnienia z macierzy do matroidów, co przedstawimy w rozdziale 10. Drugi, bardziej praktyczny, powód to możliwość łatwego programowania grafów, zwłaszcza niedużych, w tych językach (pakietach, środowiskach), w których macierze są podstawową strukturą danych<sup>†</sup>.

*Macierz incydencji*      Niech  $V = \{1, \dots, n\}$ . Dla takiego zbioru wierzchołków i zbioru krawędzi  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subseteq \{\{i, j\} : i, j \in V\}$  grafu nieskierowanego  $G = (V, E)$  określamy *macierz incydencji* grafu (zobacz dodatek A.3):

$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i \in e_j, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

### Przykład 6.2.1

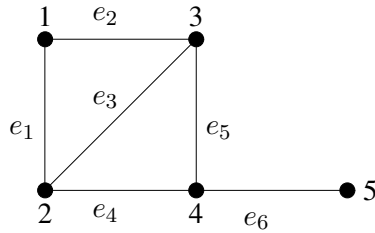
Wyznamy macierz incydencji grafu  $G$  z rysunku 6.7. Graf ten ma 5 wierzchołków:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

oraz 6 krawędzi:

$$\begin{aligned} E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \\ &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}. \end{aligned}$$

<sup>†</sup>Są to głównie Matlab i jego bezpłatne odpowiedniki: Scilab i Octave.



Rysunek 6.7. Graf do przykładów 6.2.1 i 6.2.7

Macierz incydencji tego grafu ma postać:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stopień każdego wierzchołka to liczba jedynek w odpowiadającym mu wierszu macierzy, to znaczy  $d(1) = 2$ ,  $d(2) = 3$ ,  $d(3) = 3$ ,  $d(4) = 3$  i  $d(5) = 1$ , czyli  $\sum_{i=1}^5 d(i) = 12$ .

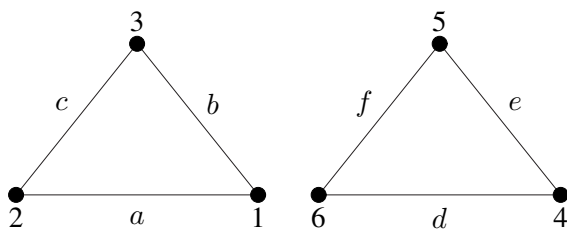
Macierz incydencji składa się tylko z elementów 0 oraz 1, a więc jest macierzą binarną. Ponieważ krawędź grafu jest incydentna z dokładnie dwoma wierzchołkami, stąd każda kolumna macierzy ma dokładnie dwie jedynki. Wiersz, w którym wszystkie elementy są zerami, reprezentuje wierzchołek izolowany. Krawędzie równoległe mają identyczne kolumny. Liczba jedynek w każdym wierszu jest równa stopniowi odpowiadającego mu wierzchołka.

### Przykład 6.2.2

Rozważmy graf o dwóch spójnych składowych, przedstawiony na rysunku 6.8.

Jego macierz incydencji ma postać:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Rysunek 6.8. Graf o dwóch spójnych składowych do przykładu 6.2.2

Jeżeli graf  $G$  nie jest spójny i składa się z dwóch składowych  $G_1$  i  $G_2$ , to macierz incydencji  $A(G)$  może być zapisana w postaci:

$$\begin{bmatrix} A(G_1) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{bmatrix},$$

gdzie  $A(G_1)$  oraz  $A(G_2)$  są macierzami incydencji grafów  $G_1$  i  $G_2$ . Jeżeli składowych jest  $k$ , to macierz można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} A(G_1) & & 0 \\ & A(G_2) & \\ 0 & \ddots & \\ & & A(G_k) \end{bmatrix}.$$

Permutacja dwóch wierszy lub kolumn w macierzy incydencji odpowiada przeetykietowaniu wierzchołków i krawędzi tego grafu.

Dla danego zbioru wierzchołków  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  i zbioru łuków  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subseteq V \times V$  grafu skierowanego bez pętli  $G = (V, E)$  określamy macierz incydencji:

Macierz  
incydencji

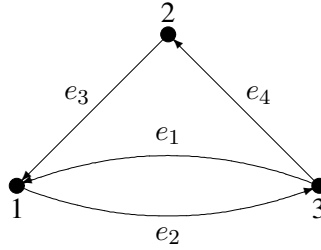
$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{gdy } e_j = (k, i), \\ 1, & \text{gdy } e_j = (i, k), \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

### Przykład 6.2.3

Graf skierowany  $G$  z rysunku 6.9 ze zbiorem wierzchołków  $V = \{1, 2, 3\}$  i zbiorem krawędzi  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{(1, 3), (3, 1), (2, 1), (3, 2)\}$



Rysunek 6.9. Graf skierowany do przykładów 6.2.3 i 6.2.8

ma macierz incydencji postaci:

$$A(G) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stopnie kolejnych wierzchołków to:  $d^+(1) = 1$ ,  $d^+(2) = 1$ ,  $d^+(3) = 2$ ,  $\sum_{i=1}^3 d^+(i) = 4$ ;  $d^-(1) = 2$ ,  $d^-(2) = 1$ ,  $d^-(3) = 1$ ,  $\sum_{i=1}^3 d^-(i) = 4$ ;  $d(1) = 3$ ,  $d(2) = 2$ ,  $d(3) = 3$ ,  $\sum_{i=1}^3 d(i) = 8$ .

### Twierdzenie 6.2.1

*Dla grafu nieskierowanego zachodzi:*

$$\sum_{i \in V} d(i) = 2|E|.$$

*Dla grafu skierowanego zachodzi:*

$$\sum_{i \in V} d^-(i) = \sum_{i \in V} d^+(i) = |E|.$$

*Dowód.* Wystarczy policzyć sumy niezerowych elementów o jednakowych znakach w odpowiednich macierzach incydencji.  $\square$

### Wniosek 6.2.1.

*W dowolnym grafie skierowanym lub nieskierowanym liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.*

Niech graf nieskierowany  $G$  ma  $m$  krawędzi oraz  $k$  różnych cykli. Macierz cykli

Macierz cykli

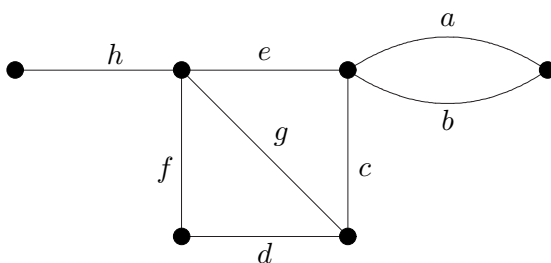
$$C(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{km} \end{bmatrix}$$

to zero-jedynkowa macierz wymiaru  $k \times m$ , w której  $c_{ij} = 1$ , jeżeli  $i$ -ty cykl zawiera  $j$ -tą krawędź, oraz  $c_{ij} = 0$  w przeciwnym przypadku.

**Przykład 6.2.4**

Graf  $G$  z rysunku 6.10 ma cztery różne cykle:  $C_1 = \{a, b\}$ ,  $C_2 = \{c, e, g\}$ ,  $C_3 = \{d, f, g\}$ ,  $C_4 = \{c, d, f, e\}$ . Jego macierzą cykli jest:

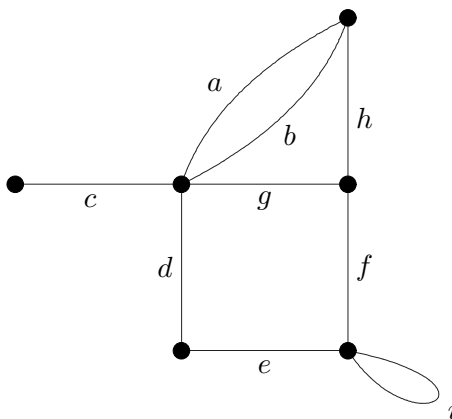
$$C(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Rysunek 6.10. Graf do przykładów 6.2.4 i 6.2.7

**Przykład 6.2.5**

Graf  $G$  z rysunku 6.11 ma siedem różnych cykli:  $C_1 = \{a, b\}$ ,  $C_2 = \{b, g, h\}$ ,  $C_3 = \{a, g, h\}$ ,  $C_4 = \{d, e, f, g\}$ ,  $C_5 = \{b, d, e, f, h\}$ ,  $C_6 = \{a, d, e, f, h\}$ ,  $C_7 = \{i\}$ .



Rysunek 6.11. Graf do przykładu 6.2.5

Jego macierzą cykli jest:

$$C(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W macierzy cykli kolumna złożona z samych zer odpowiada krawędzi, która nie należy do żadnego cyklu. Każdy wiersz macierzy zawiera tylko te krawędzie, które tworzą odpowiadający mu cykl. Pętli odpowiada wiersz zawierający tylko jedną jedynkę. Liczba jedynek w wierszu jest równa liczbie krawędzi w odpowiednim cyklu. Jeżeli graf  $G$  nie jest spójny i składa się z dwóch składowych  $G_1$  oraz  $G_2$ , to macierz cykli  $C(G)$  może być zapisana w postaci:

$$\begin{bmatrix} C(G_1) & 0 \\ 0 & C(G_2) \end{bmatrix},$$

gdzie  $C(G_1)$  oraz  $C(G_2)$  są macierzami cykli grafów  $G_1$  oraz  $G_2$ . Wynika stąd, że cykle w  $G_1$  nie mają żadnej krawędzi zawartej w  $G_2$  i odwrotnie. Permutacji każdych dwóch wierszy lub kolumn odpowiada przeetykietowanie cykli i krawędzi. Jeżeli składowych jest  $k$ , to macierz można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} C(G_1) & & & \\ & C(G_2) & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & C(G_k) \end{bmatrix}.$$

### Twierdzenie 6.2.2

*Jeżeli  $G$  jest grafem bez pętli z macierzą incydencji  $A$  i macierzą cykli  $C$ , których kolumny są uporządkowane według tego samego porządku krawędzi, to każdy wiersz w  $C$  jest ortogonalny (patrz dodatek A.3) do każdego wiersza macierzy  $A$ , to znaczy  $AC^T = CA^T \equiv 0 \pmod{2}$ , gdzie  $A^T$  i  $C^T$  oznaczają odpowiednio transpozycje macierzy  $A$  oraz  $C$ .*

**Przykład 6.2.6**

Dla grafu z przykładu 6.2.4 (rysunek 6.10) mamy:

$$\begin{aligned}
 AC^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv 0 \pmod{2}.
 \end{aligned}$$

Dla danego zbioru wierzchołków  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  i zbioru krawędzi  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subseteq \{\{i, j\} : i, j \in V\}$  grafu nieskierowanego  $G = (V, E)$  określamy kwadratową *macierz sąsiedztwa wierzchołków grafu* (ang. *adjacency matrix*):

*Macierz  
sąsiedztwa*

$$B(G) = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$b_{ij} = b_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \{i, j\} \in E, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wierzchołki połączone krawędzią są wierzchołkami sąsiednimi, stąd nazwa macierzy.

**Przykład 6.2.7**

Dla grafu  $G$  na rysunku 6.2.7 określonego w przykładzie 6.2.1 wyznaczamy macierz sąsiedztwa wierzchołków. Ma ona postać:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stopnie kolejnych wierzchołków to:  $d(1) = 2$ ,  $d(2) = 3$ ,  $d(3) = 3$ ,  $d(4) = 3$ ,  $d(5) = 1$ .

Macierz  
sąsiedztwa  
grafu  
skierowanego

Dla danego zbioru wierzchołków  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  i zbioru łuków  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subseteq V \times V$  grafu skierowanego bez pętli  $G = (V, E)$  określamy macierz sąsiedztwa wierzchołków grafu:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (i, j) \in E, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Oznacza to, że  $b_{ij} = 1$  tylko wtedy, gdy wierzchołek  $i$ -ty jest początkiem, a  $j$ -ty – końcem łuku.

### Przykład 6.2.8

Dla grafu  $G$  z rysunku 6.9 określonego w przykładzie 6.2.3 wyznaczamy macierz sąsiedztwa wierzchołków. Ma ona postać:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stopnie kolejnych wierzchołków to:  $d^+(1) = 1$ ,  $d^+(2) = 1$ ,  $d^+(3) = 2$ ,  $d^-(1) = 2$ ,  $d^-(2) = 1$ ,  $d^-(3) = 1$ .

Liczba wierzchołków grafu jest równa stopniowi macierzy sąsiedztwa. Liczba jedynek na przekątnej podaje, ile jest pętli w grafie. Suma elementów wiersza określa, ile krawędzi wychodzi z wierzchołka  $v_i$ . Suma wszystkich elementów macierzy jest równa łącznej liczbie łuków w grafie.

### Przykład 6.2.9

Dana jest macierz sąsiedztwa pewnego grafu skierowanego:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Graf ma 4 wierzchołki, gdyż macierz jest wymiaru  $4 \times 4$ . Ma on 8 łuków, gdyż suma wyrazów macierzy wynosi 8. Ponieważ wszystkie wyrazy macierzy są zerami i jedynkami, graf nie ma krawędzi wielokrotnych. Ma on jedną pętlę, gdyż jest jedna jedynka na głównej przekątnej.

Macierze sąsiedztwa wyznaczają jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu – patrz punkt 6.3) tylko grafy proste.

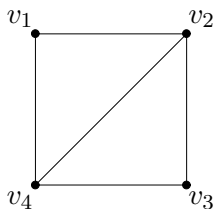
Liczba dróg  
między  
wierzchołkami

### Twierdzenie 6.2.3

Jeżeli  $B$  jest macierzą sąsiedztwa grafu nieskierowanego  $G$ , to element  $b_{ij}^{(k)}$  macierzy  $B^k$  jest równy liczbie dróg (niekoniecznie prostych) mających  $k$  krawędzi między wierzchołkami  $i$  oraz  $j$ .

### Przykład 6.2.10

Przeanalizujmy graf  $G$  przedstawiony na rysunku 6.12:



Rysunek 6.12. Graf do przykładu 6.2.10

Jego macierz sąsiedztwa ma postać:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Widzimy zatem, że są dwie drogi długości 2 z wierzchołka  $v_1$  do niego samego, jest jedna droga długości 2 z wierzchołka  $v_1$  do wierzchołka  $v_2$  itd. Aby otrzymać liczbę dróg długości 3, możemy skorzystać z macierzy:

$$B^3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Jak widać,  $b_{11} = 2$  oznacza, że mamy dwie drogi od wierzchołka  $v_1$  do niego samego. Są to drogi:

$$\begin{aligned} &(v_1, v_2, v_4, v_1), \\ &(v_1, v_4, v_2, v_1). \end{aligned}$$

Mamy też  $b_{12} = 5$  dróg między wierzchołkami  $v_1$  i  $v_2$ :

$$\begin{aligned} & (v_1, v_2, v_1, v_2), \\ & (v_1, v_4, v_1, v_2), \\ & (v_1, v_2, v_3, v_2), \\ & (v_1, v_2, v_4, v_2), \\ & (v_1, v_4, v_3, v_2). \end{aligned}$$

Drogi składające się z tych samych krawędzi, ale występujących w nich w innej kolejności, są różne.

### Przykład 6.2.11

W grafie z przykładu 6.2.10 mamy  $b_{11}^{(4)} = 10$  w macierzy  $B^4$ :

$$B^4 = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 10 & 9 \\ 9 & 15 & 9 & 14 \\ 10 & 9 & 10 & 9 \\ 9 & 14 & 9 & 15 \end{bmatrix}.$$

Istnieje więc 10 dróg od  $v_1$  do  $v_1$ . Jest tak, gdyż drogi  $(v_1, v_2, v_1, v_4, v_1)$  i  $(v_1, v_4, v_1, v_4, v_1)$  są różne.

### Przykład 6.2.12

Macierz sąsiedztwa grafu z rysunku 6.13:



Rysunek 6.13. Graf do przykładu 6.2.12

ma postać:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jej  $n$ -ta potęga daje dokładną liczbę dróg długości  $n$  łączących każde dwa wierzchołki. Ogólnie bezpośrednio z definicji liczb Fibonacciego mamy:

$$B^n = \begin{bmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{bmatrix},$$

gdzie  $f_n$  oznacza  $n$ -tą liczbę Fibonacciego (patrz pkt 1.3).

Graf  $G$  o  $n$  wierzchołkach i macierzy sąsiedztwa  $B$  jest niespójny, gdy istnieją co najmniej dwa wierzchołki  $u$  i  $v$ , między którymi nie ma żadnej drogi (to znaczy ani drogi długości 2, ani długości 3 itd.) Oznacza to, że w każdej macierzy  $B, B^2, B^3, \dots$  na pozycji  $(i, j)$  jest zero. Jeżeli w grafie  $G$  istnieje droga od wierzchołka  $v_i$  do  $v_j$ , to w co najmniej

jednej z macierzy  $B, B^2, B^3, \dots, B^n$  na pozycji  $(i, j)$  jest liczba różna od zera. Wystarczy zbadać sumę  $B + B^2 + B^3 + \dots + B^n$ . Graf jest *spójny* wtedy i tylko wtedy, gdy macierz będąca wynikiem tego dodawania ma wszystkie pola niezerowe.

Związek między macierzami incydencji i sąsiedztwa podaje następująca własność.

### Własność 6.2.1

*Macierz stopni* Niech  $G$  będzie grafem nieskierowanym prostym oraz niech  $D(G)$  będzie macierzą stopni:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j, \\ d(i) & \text{dla } i = j, \end{cases}$$

gdzie  $d(i)$  jest stopniem wierzchołka o numerze  $i$ . Wtedy:

$$A(G) A^T(G) = B(G) + D(G).$$

### Przykład 6.2.13

Dla grafu  $G$  z rysunku 6.7 mamy:

$$\begin{aligned} A(G) A^T(G) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= B(G) + D(G). \end{aligned}$$

### 6.3. Izomorfizm, podstawowe własności i typy grafów

Dwa nieskierowane grafy  $G = (V, E)$  i  $G' = (V', E')$  są *izomorficzne*, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy zbiorami wierzchołków oraz pomiędzy zbiorami krawędzi zachowująca relację sąsiedztwa. Oznacza to, że istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie pomiędzy wierzchołkami  $f : V \rightarrow V'$  takie, że dla dowolnej pary wierzchołków  $i, j \in V$  zachodzi:

*Izomorfizm –  
grafy  
nieskierowane*

$$\{i, j\} \in E \Leftrightarrow \{f(i), f(j)\} \in E'$$

oraz liczba krawędzi łączących wierzchołki  $i$  oraz  $j$  jest taka sama jak liczba krawędzi łączących wierzchołki  $f(i)$  oraz  $f(j)$ . Izomorfizm grafów  $G$  oraz  $G'$  zapisujemy jako  $G \cong G'$ . Z definicji wynika, że grafy  $G$  i  $G'$  są izomorficzne, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między wierzchołkami grafu  $G$  oraz  $G'$  taka, że liczba krawędzi łączących dane dwa wierzchołki grafu  $G$  jest równa liczbie krawędzi łączących odpowiadające im wierzchołki grafu  $G'$ .

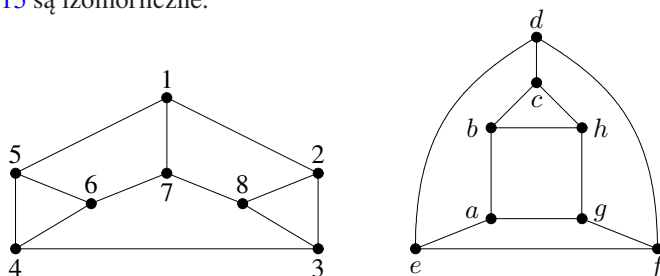
Dla digrafów  $G = (V, E)$  i  $G' = (V', E')$  warunek izomorfizmu ma postać:

*Izomorfizm –  
grafy  
skierowane*

$$(i, j) \in E \Leftrightarrow (f(i), f(j)) \in E'.$$

#### Przykład 6.3.1

Grafy przedstawione na rysunku 6.14 i multigrafy przedstawione na rysunku 6.15 są izomorficzne.



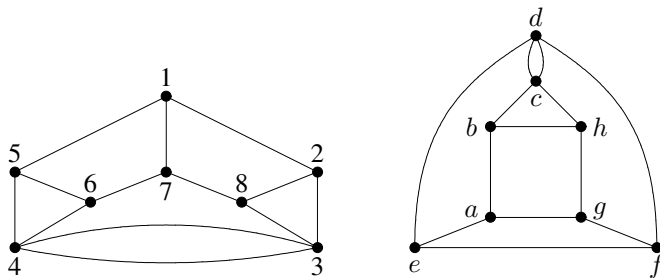
Rysunek 6.14. Grafy izomorficzne do przykładu 6.3.1

Odwzorowanie określające izomorfizm jest następujące:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(i)$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$

Dwa izomorficzne grafy proste muszą mieć:

- tę samą liczbę wierzchołków,
- tę samą liczbę krawędzi,

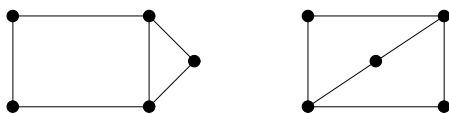


Rysunek 6.15. Multigrafy izomorficzne do przykładu 6.3.1

c) równą liczbę wierzchołków o danym stopniu.

### Przykład 6.3.2

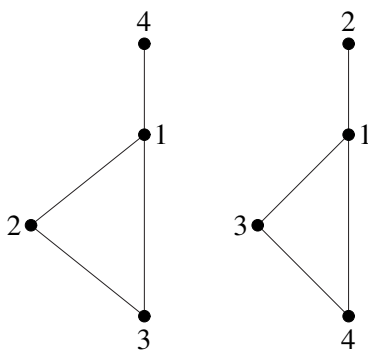
Grafy pokazane na rysunku 6.16 mają taką samą liczbę wierzchołków, krawędzi i wierzchołków o tym samym stopniu, ale nie są izomorficzne.



Rysunek 6.16. Grafy nieizomorficzne do przykładu 6.3.2

### Przykład 6.3.3

Rozważmy graf prosty narysowany po lewej stronie na rysunku 6.17.



Rysunek 6.17. Grafy izomorficzne do przykładu 6.3.3

Jego macierz incydencji ma postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W powyższej macierzy zamienimy miejscami wiersz drugi z czwartym, a następnie wiersz trzeci z czwartym. Otrzymujemy macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiada jej graf narysowany po prawej stronie. Grafy te są izomorficzne.

Ponieważ permutacja dowolnych dwóch wierszy lub kolumn w macierzy incydencji odpowiada po prostu przeetykietowaniu wierzchołków i krawędzi tego samego grafu, możemy więc sformułować następujące twierdzenie.

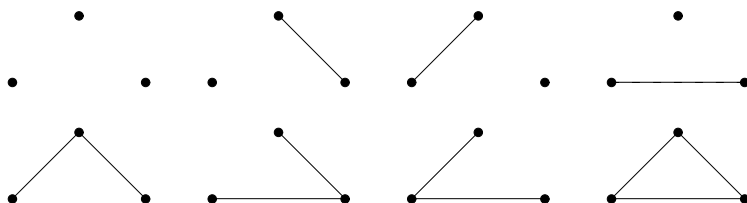
*Grafy  
izomorficzne*

### Twierdzenie 6.3.1

*Dwa grafy  $G_1$  oraz  $G_2$  są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy ich macierze incydencji  $R(G_1)$  oraz  $R(G_2)$  różnią się tylko permutacją wierszy i kolumn.*

### Przykład 6.3.4

Istnieje osiem różnych grafów o trzech wierzchołkach, ale wśród nich tylko cztery są nieizomorficzne.



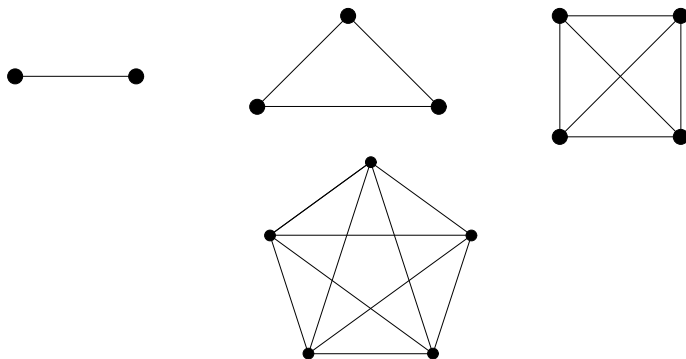
Rysunek 6.18. Wszystkie grafy o trzech wierzchołkach



Rysunek 6.19. Wszystkie grafy nieizomorficzne o trzech wierzchołkach

*Graf pełny*

Graf prosty nazywamy *pełnym* (ang. *complete graph*), jeśli dla każdej pary wierzchołków istnieje krawędź łącząca te wierzchołki.  $K_n$  oznacza graf pełny o  $n$  wierzchołkach.

Rysunek 6.20. Grafy pełne  $K_n$  dla  $n = 2, 3, 4, 5$ **Przykład 6.3.5**

Grafami pełnymi są grafy przedstawione na rysunku 6.20.

Graf pełny  $K_n$  ma  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  krawędzi.

*Graf regularny* Graf nazywamy *regularnym* lub *d-regularnym*, jeżeli wszystkie jego wierzchołki mają ten sam stopień  $d$ . Grafem kubicznym nazywany jest graf 3-regularny. Dwa grafy regularne o tej samej liczbie wierzchołków i tym samym stopniu wierzchołków nie muszą być izomorficzne. Graf pełny  $K_n$  jest grafem regularnym stopnia  $n - 1$ .

**Przykład 6.3.6**

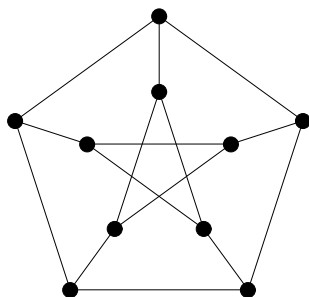
Grafy przedstawione na rysunku 6.14 są regularne. Każdy wierzchołek ma stopień równy 3, czyli są to grafy kubiczne.

*Graf Petersena* **Przykład 6.3.7**

Ciekawym przykładem grafu regularnego, którego własności będziemy omawiać dalej, jest przedstawiony na rysunku 6.21 graf Petersena<sup>56</sup>. Stopień każdego wierzchołka wynosi 3. Jest to graf, który dość często bywa wykorzystywany jako ciekawy przykład lub kontrprzykład w wielu problemach teorii grafów.

*Graf dwudzielny*

Graf nazywamy *dwudzielnym* (ang. *bipartite graph*), jeśli zbiór jego wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne podzbiory tak, że żadne dwa wierzchołki należące do tego samego zbioru nie są sąsiednie.



Rysunek 6.21. Graf Petersena

**Twierdzenie 6.3.2**

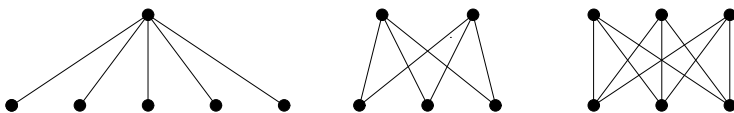
*Graf  $G$  jest grafem dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy cykl w  $G$  ma długość parzystą.*

*Graf pełny  
dwudzielny*

Graf prosty  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  nazywamy *pełnym grafem dwudzielnym*, jeśli jest dwudzielny i zawiera wszystkie krawędzie łączące wierzchołki ze zbioru  $V_1$  z wierzchołkami ze zbioru  $V_2$ . Jeśli  $|V_1| = s$ ,  $|V_2| = t$ , to graf pełny dwudzielny  $K_{s,t}$  ma  $s + t$  wierzchołków i  $st$  krawędzi.

**Przykład 6.3.8**

Grafami pełnymi dwudzielnymi są grafy przedstawione na rysunku 6.22.

Rysunek 6.22. Grafy pełne dwudzielne  $K_{1,5}$ ,  $K_{2,3}$ ,  $K_{3,3}$ 

*Graf spójny*

Przypomnijmy, że graf nieskierowany  $G = (V, E)$  jest *spójny*, jeśli dla każdej pary wierzchołków istnieje droga łącząca te wierzchołki. Graf spójny ma jedną składową spójną (tożsamą z tym grafem), a graf niespójny ma co najmniej dwie składowe spójne.

**Twierdzenie 6.3.3**

*Jeśli graf  $G$  ma  $n$  wierzchołków oraz  $k$  składowych spójnych, to liczba jego krawędzi  $m$  spełnia nierówność:*

$$n - k \leq m \leq \frac{(n - k)(n - k + 1)}{2}.$$

**Wniosek 6.3.1.**

W grafie spójnym liczba krawędzi  $m$  spełnia nierówność:

$$n - 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Stąd dla grafu pełnego  $K_n$  liczba krawędzi wynosi  $m = n(n-1)/2$ , a dla drzewa liczba krawędzi wynosi  $m = n - 1$ .

Jeśli  $G$  jest grafem prostym, którego zbiorem wierzchołków jest  $V(G)$ , to dopełnieniem  $\overline{G}$  grafu  $G$  jest graf prosty, którego zbiorem wierzchołków jest  $V(G)$  i w którym dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy nie są sąsiednie w grafie  $G$ , czyli graf zawierający tylko te krawędzie, których nie ma w  $G$ .

*Metryka*

Odległością  $d(v, w)$  wierzchołka  $v$  od wierzchołka  $w$  w grafie spójnym  $G = (V, E)$  nazywamy długość najkrótszej drogi między nimi. Odległość  $d$  jest metryką w zbiorze  $V$ , więc para  $(V, d)$  jest przestrzenią metryczną (patrz dodatek A.2).

Zbiór wierzchołków grafu jest zatem przestrzenią metryczną dyskretną (patrz dodatek A.2). Wierzchołek  $v$  grafu spójnego  $G$  o tej własności, że największa z odległości od wierzchołka  $v$  do innych wierzchołków grafu  $G$ , czyli:

$$\max_{u \in V} d(u, v),$$

jest najmniejsza, nazywamy wierzchołkiem centralnym grafu  $G$ . Zbiór wierzchołków centralnych tworzy centrum grafu  $G$ .

*Centrum grafu*

Promień  $r(G)$  grafu to odległość od centrum do najdalszego wierzchołka, czyli:

$$r(G) = \min_{u \in V} \max_{v \in V} d(u, v). \quad (6.3.1)$$

Średnica  $\delta(G)$  grafu to:

$$\delta(G) = \max_{u, v \in V} d(u, v). \quad (6.3.2)$$

Oczywiście

$$r(G) \leq \delta(G) \leq 2r(G). \quad (6.3.3)$$

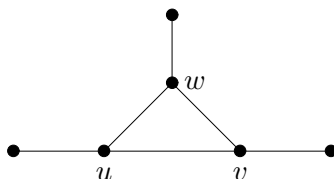
Kliką grafu nazywamy maksymalny podgraf pełny.

**Przykład 6.3.9**

Dla grafu Petersena (patrz rysunek 6.21 z przykładu 6.3.7) mamy promień  $r = 2$ , średnicę  $\delta = 2$  i centrum w każdym wierzchołku.

**Przykład 6.3.10**

Dla grafu przedstawionego na rysunku 6.23 ze wzoru (6.3.3) otrzymujemy  $\delta(G) = 3$ . Ze wzoru (6.3.1) otrzymujemy  $r(G) = 2$ , gdzie najmniejsza z maksymalnych odległości jest realizowana przez wierzchołki  $u$ ,  $v$  oraz  $w$ . Wszystkie nierówności we wzorze (6.3.3) są ostre.



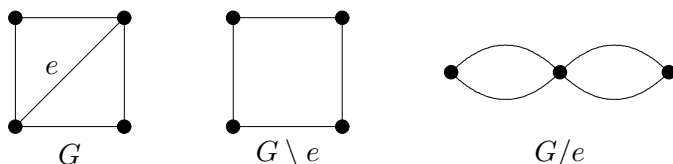
Rysunek 6.23. Graf do przykładu 6.3.10

*Ściągnięcie i usunięcie*

Jeśli  $e$  jest krawędzią grafu  $G$ , to  $G \setminus e$  oznacza graf otrzymany przez usunięcie krawędzi  $e$ . Jeśli  $v$  jest wierzchołkiem grafu  $G$ , to  $G \setminus v$  oznacza graf otrzymany przez usunięcie wierzchołka  $v$ .  $G/e$  oznacza graf otrzymany przez ściągnięcie krawędzi  $e$ , czyli usunięcie jej końców  $v$  oraz  $w$  i zastąpienie ich przez nowy wierzchołek  $u$  incydentny z tymi krawędziami (różnymi od  $e$ ), które były incydentne z  $v$  lub  $w$ .

**Przykład 6.3.11**

Rysunek 6.24 przedstawia graf  $G$  z usunięciem  $G \setminus e$  i ściągnięciem  $G/e$  przez krawędź  $e$ .



Rysunek 6.24. Usunięcie i ściągnięcie – do przykładu 6.3.11

*Grafy: płaski i planarny*

*Graf płaski* to graf, który jest narysowany na płaszczyźnie bez przecięć. *Graf planarny* to graf, który można narysować na płaszczyźnie bez przecięć. *Minorem* grafu  $G = (V, E)$  nazywamy graf otrzymany przez kolejne operacje ściągnięcia i usunięcia krawędzi. W 1930 roku K. Kuratowski<sup>38</sup> udowodnił słynne twierdzenie, które mówi, że graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera minora, którym jest  $K_{3,3}$  lub  $K_5$  (patrz rys. 6.22 i 6.20). Z twierdzenia Kuratowskiego wynika, że płaskość grafu jest własnością tylko kombinatoryczną, którą

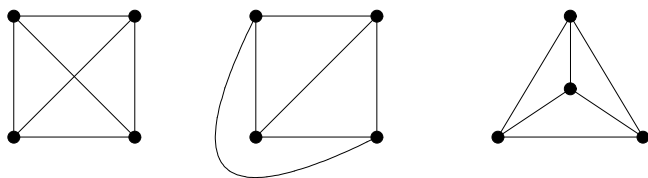
*Twierdzenie Kuratowskiego*

nazwaliśmy planarnością, i nie odwołuje się do geometrycznego pojęcia płaszczyzny. Wobec tego można zdefiniować graf planarny tylko kombinatorycznie.

Grafem *planarnym* nazywamy graf, który nie zawiera jako podgrafu minora izomorficznego z  $K_5$  lub  $K_{3,3}$ .

### Przykład 6.3.12

Grafem planarnym jest graf  $K_4$  przedstawiony na rysunku 6.25.



Rysunek 6.25. Graf  $K_4$  i jego trzy przedstawienia na płaszczyźnie: jedno niepłaskie i dwa płaskie

Każdy podgraf grafu planarnego jest grafem planarnym. Każdy graf zawierający podgraf nieplanarny sam musi być nieplanarny. Każdy graf zawierający  $K_{3,3}$  lub  $K_5$  jako podgraf jest grafem nieplanarnym, co więcej, każdy graf nieplanarny musi zawierać jako minor co najmniej jeden z nich.

*Obszar*

*Obszarem* (ścianą) grafu płaskiego nazywamy część płaszczyzny wyznaczoną przez krawędzie danego grafu. Każdy graf płaski posiada jeden nieograniczony obszar zwany obszarem zewnętrznym.

W 1750 roku L. Euler<sup>16</sup> udowodnił poniższe twierdzenie.

### Twierdzenie 6.3.4

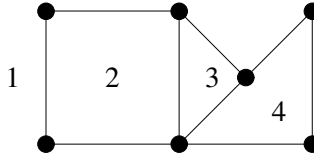
Niech  $G$  będzie grafem płaskim mającym  $n$  wierzchołków,  $m$  krawędzi,  $f$  obszarów oraz  $k$  składowych. Wtedy  $n - m + f = k + 1$ .

### Wniosek 6.3.2.

Niech  $G$  będzie spójnym grafem płaskim, mającym  $n$  wierzchołków,  $m$  krawędzi oraz  $f$  obszarów. Wtedy  $n - m + f = 2$ .

### Przykład 6.3.13

Dla grafu z rysunku 6.26 mamy  $m = 9$ ,  $n = 7$ ,  $k = 1$ ,  $f = 4$ . Stąd otrzymujemy  $n - m + f = 7 - 9 + 4 = 2$ .



Rysunek 6.26. Graf płaski i jego obszary

Zauważmy, że jeśli graf jest prosty, to każdy obszar w płaskim obrazie grafu jest ograniczony co najmniej trzema krawędziami, a jeśli graf nie ma trójkątów, to czterema. Ponadto każda krawędź ogranicza dwa obszary. Stąd  $4f \leq 2m$ , a jeśli graf nie ma trójkątów, to  $3f \leq 2m$ . W ten sposób z twierdzenia Eulera 6.3.4 otrzymujemy następujący wniosek.

**Wniosek 6.3.3.**

*Jeśli  $G$  jest spójnym planarnym grafem prostym mającym  $n \geq 3$  wierzchołków oraz  $m$  krawędzi, to:*

$$m \leq 3n - 6. \quad (6.3.4)$$

*Jeśli ponadto graf  $G$  nie ma cykli długości 3, to:*

$$m \leq 2n - 4. \quad (6.3.5)$$

**Przykład 6.3.14**

Dla grafu  $K_5$  mamy  $m = 10$ ,  $n = 5$ , więc warunek (6.3.4) nie jest spełniony i  $K_5$  nie jest planarny. Graf  $K_{3,3}$  co prawda spełnia warunek (6.3.4), ale nie ma cykli długości 3 i nie spełnia warunku (6.3.5), czyli jak poprzednio,  $K_{3,3}$  nie jest planarny.

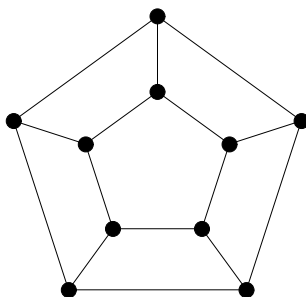
**Przykład 6.3.15**

Zarówno graf Petersena, jak i graf przedstawiony na rysunku 6.27 (graniastosłup  $G_5$ ) mają tę samą liczbę wierzchołków  $n = 10$  tego samego stopnia 3 i tę samą liczbę krawędzi  $m = 15$ . Oba grafy spełniają więc warunek (6.3.4). Nie mają też cykli długości 3 i spełniają warunek (6.3.5). Niemniej graf Petersena planarny nie jest (por. zadanie 6.14), natomiast graniastosłup  $G_5$  oczywiście jest planarny.

Z twierdzenia 6.3.4 można wyprowadzić również następny wniosek.

**Wniosek 6.3.4.**

*Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem planarnym o  $n$  wierzchołkach,  $m$  krawędziach i obwodzie (patrz str. 87) równym  $k$ . Wówczas  $(k - 2)m \leq k(n - 2)$ .*

Rysunek 6.27. Graniastosłup  $G_5$ 

Z tego wniosku wynika, że graf Petersena planarny nie jest (patrz zadanie 6.14).

### Twierdzenie 6.3.5

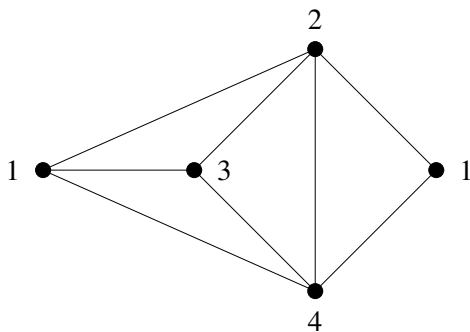
*Każdy planarny graf prosty zawiera wierzchołek stopnia co najwyżej 5.*

Oczywiście, twierdzenie 6.3.5 jest tylko warunkiem koniecznym planarności, ale nie dostatecznym. Graf  $K_6$  ma wszystkie wierzchołki stopnia 5, a planarny nie jest.

## 6.4. Kolorowanie i wielomiany

*Liczba  
chromatyczna*

Graf bez pętli  $G$  jest  $k$ -kolorowalny *prawidłowo*, jeśli każdemu wierzchołkowi można przyporządkować jeden z  $k$  kolorów w taki sposób, że wierzchołki sąsiednie mają różne kolory. Przez  $\chi(G)$  oznaczamy *liczbę chromatyczną* grafu  $G$ , czyli minimalną wartość  $k$ , dla której graf jest  $k$ -kolorowalny.

Rysunek 6.28. Graf do przykładu 6.4.1,  $\chi(G) = 4$

**Przykład 6.4.1**

Wierzchołki grafu  $G$  na rysunku 6.28 można pokolorować czterema kolorami, a nie można trzema, więc jego liczba chromatyczna  $\chi(G) = 4$ .

**Przykład 6.4.2**

Dla grafu pełnego  $n$ -wierzchołkowego,  $\chi(K_n) = n$ .

**Przykład 6.4.3**

Graf Petersena (patrz rysunek 6.21 z przykładu 6.3.7) jest 3-chromatyczny.

Z definicji wynika, że graf dwudzielny jest 2-kolorowalny (bichromatyczny). Z twierdzenia 6.3.2 otrzymujemy więc poniższy wynik.

**Wniosek 6.4.1.**

*Graf jest 2-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli o nieparzystej długości.*

Ponieważ drzewo nie zawiera żadnych cykli, to otrzymujemy jako szczególny przypadek wniosku 6.4.1, wniosek następujący.

**Wniosek 6.4.2.**

*Każde drzewo o  $n \geq 2$  wierzchołkach jest 2-kolorowalne.*

W 1941 roku R. L. Brooks<sup>5</sup> udowodnił poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 6.4.1**

*Jeżeli  $G$  jest spójnym grafem prostym, w którym największy stopień wierzchołka jest równy  $k$ , nie jest grafem pełnym ani cyklem o nieparzystej długości, to graf  $G$  jest  $k$ -kolorowalny.*

W 1964 roku V. G. Vizing<sup>73</sup> podał następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 6.4.2**

*Jeżeli największy stopień wierzchołka grafu  $G$  jest równy  $k$ , to graf  $G$  jest  $(k + 1)$ -kolorowalny.*

**Mapy**

Mapy do teorii grafów zostały wprowadzone przez jednego z największych specjalistów kombinatoryki XX wieku, W. Tutte'a<sup>71</sup>. Formalne zdefiniowanie tych obiektów miało na celu dokładniejsze zbadanie jednego z najważniejszych problemów XX wieku – problemu czterech barw. Pierwszą definicję mapy (jako reprezentację grafu na

płaszczyźnie, na której nie występują przecięcia krawędzi) stworzył J. Edmonds<sup>14</sup>.

Założmy, że dana jest mapa przedstawiająca wiele państw. Interesuje nas odpowiedź na pytanie: iloma kolorami można pokolorować tę mapę tak, by żadne dwa państwa mające wspólną granicę niezerowej długości nie były pokolorowane tym samym kolorem? Jeżeli zbiór państw będzie zbiorem wierzchołków grafu i dwa wierzchołki będą połączone krawędzią, jeśli te państwa ze sobą graniczą, to problem pokolorowania mapy jest problemem pokolorowania grafu planarnego.

Jednym z najsłynniejszych twierdzeń dotyczących kolorowania map jest sformułowane poniżej twierdzenie o czterech barwach.

*Twierdzenie  
o czterech  
barwach*

#### **Twierdzenie 6.4.3**

*Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny.*

Twierdzenie o czterech barwach mówi, że każdą płaską mapę można pokolorować czterema kolorami tak, że każde dwa stykające się obszary będą miały różne kolory. Dowód ze wspomaganie komputera podali K. I. Appel<sup>2</sup> i W. Haken<sup>27</sup> dopiero w 1976 roku, a więc ponad sto lat po sformułowaniu problemu. Ciekawe jest to, że dowód o 6-kolorowalności grafu planarnego jest bardzo prosty, a niewiele bardziej skomplikowany jest dowód 5-kolorowalności grafu planarnego (patrz na przykład R. J. Wilson [26], str. 110).

*Krawędziowa  
liczba  
chromatyczna*

Graf  $G$  jest  $k$ -kolorowalny krawędziowo, jeżeli jego krawędzie można pokolorować  $k$  kolorami w taki sposób, by żadne dwie sąsiednie krawędzie nie miały tego samego koloru. Jeśli graf  $G$  jest  $k$ -kolorowalny krawędziowo, ale nie jest  $(k - 1)$ -kolorowalny krawędziowo, to mówimy, że jego indeks chromatyczny wynosi  $k$ , i piszemy  $\chi'(G) = k$ .

W 1964 roku V. G. Vizing<sup>73</sup> udowodnił poniższe twierdzenie.

#### **Twierdzenie 6.4.4**

*Jeżeli  $G$  jest grafem prostym, w którym największy stopień wierzchołka wynosi  $k$ , to:*

$$k \leq \chi'(G) \leq k + 1.$$

#### **Twierdzenie 6.4.5**

$\chi'(K_n) = n$  dla  $n$  nieparzystych i  $\chi'(K_n) = n - 1$  dla  $n$  parzystych.

W 1916 roku D. König<sup>34</sup> podał następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 6.4.6**

Jeśli w grafie dwudzielnym największy stopień wierzchołka wynosi  $k$ , to  $\chi'(G) = k$ .

**Wniosek 6.4.3.**

$$\chi'(K_{s,t}) = \max\{s, t\}.$$

*Graf  
krawędziowy*

*Graf krawędziowy* (ang. *line graph*) grafu  $G$  to taki graf  $L(G)$ , którego zbiorem wierzchołków jest zbiór krawędzi grafu  $G$ , to znaczy  $V(L(G)) = E(G)$ , a zbiorem krawędzi  $E(L(G))$  jest zbiór par elementów zbioru  $E(G)$ . Wierzchołki  $\{v_1, v_2\}$ ,  $\{v_3, v_4\}$  grafu  $L(G)$  są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy  $v_1 = v_3$ ,  $v_1 = v_4$ ,  $v_2 = v_3$  lub  $v_2 = v_4$ . Kolorowanie wierzchołków grafu  $L(G)$  jest równoważne kolorowaniu krawędzi w grafie  $G$ , czyli  $\chi(L(G)) = \chi'(G)$ .

*Wielomian  
chromatyczny*

Niech  $G$  będzie grafem prostym i niech  $P(G; k)$  będzie liczbą sposobów prawidłowego pokolorowania wierzchołków grafu  $G$  za pomocą  $k$  kolorów. Funkcję  $P(G; k)$  nazywamy *funkcją chromatyczną* grafu  $G$ . Funkcja chromatyczna grafu prostego jest wielomianem, dlatego  $P(G; k)$  nazywamy *wielomianem chromatycznym* grafu  $G$ .

**Przykład 6.4.4**

Jeżeli  $G = C_3$  jest trójkątem, to:

$$P(G; k) = k(k-1)(k-2).$$

Dowolny wierzchołek kolorujemy jednym z  $k$  kolorów, drugi – jednym z  $k-1$  kolorów (innym niż  $k$ -ty), a trzeci – dowolnym z pozostałych  $k-2$  kolorów.

**Twierdzenie 6.4.7**

Niech  $G$  będzie grafem prostym i niech  $G \setminus e$  oraz  $G/e$  będą grafami otrzymanymi z  $G$  przez odpowiednio usunięcie i ściągnięcie krawędzi  $e$ . Wtedy:

$$P(G; k) = P(G \setminus e; k) - P(G/e; k).$$

Stosując powyższe twierdzenie, redukujemy każdy graf do grafów, których funkcje chromatyczne znamy, na przykład do drzew. Jeśli graf  $G$  ma  $n$  wierzchołków, to wielomian  $P(G; k)$  ma stopień  $n$ .

**Przykład 6.4.5**

Jeżeli graf  $G$  jest drzewem o  $n$  wierzchołkach, to można pokazać rekurencyjnie, że:

$$P(G; k) = k(k-1)^{n-1}.$$

Niech  $T_n$  będzie drzewem o  $n$  wierzchołkach, natomiast  $e = \{u, v\}$  krawędzią, w której koniec  $v$  jest wierzchołkiem wiszącym. Wtedy  $T_n \setminus e = T_n/e \cup \{v\}$ , gdzie  $\{v\}$  jest wierzchołkiem izolowanym w  $T_n \setminus e$ . Niech  $k$  będzie liczbą kolorów.

Oczywiście  $P_{T_1}(k) = k$ . Indukcyjnie:

$$P_{T_n \setminus e}(k) = k(k-1)^{n-2}k,$$

$$P_{T_n/e}(k) = k(k-1)^{n-2},$$

więc:

$$\begin{aligned} P_{T_n}(k) &= P_{T_n \setminus e}(k) - P_{T_n/e}(k) \\ &= k^2(k-1)^{n-2} - k(k-1)^{n-2} \\ &= k(k(k-1)^{n-2} - (k-1)^{n-2}) \\ &= k((k-1)(k-1)^{n-2}) = k(k-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

**Przykład 6.4.6**

Dla grafu  $G$  z rysunku 6.24 wielomian chromatyczny otrzymujemy w ten sposób, że dokonujemy usunięcia i ściągnięcia przez krawędź  $e$ . Dostajemy cykl  $C_4$  i graf mający ten sam wielomian chromatyczny co drzewo o trzech wierzchołkach. Wielomian chromatyczny dla  $C_4$  otrzymujemy jak poprzednio – przez ściągnięcie i usunięcie przez dowolną krawędź (patrz zadanie 6.16). Otrzymujemy wtedy cykl  $C_3$  i drogę o czterech wierzchołkach. Stąd:

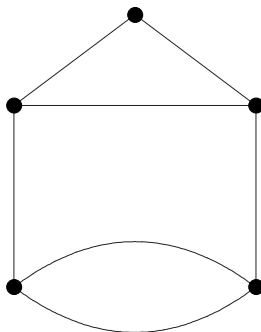
$$\begin{aligned} P(G; k) &= P(G \setminus e; k) - P(G/e; k) \\ &= (k(k-1)^2 + k((k-1)^2 - (k-1))(k-2)) \\ &\quad - k(k-1)^2 \\ &= k(k-1)(k^2 - 3k + 3) - k(k-1)^2 \\ &= k(k-1)(k-2)^2. \end{aligned}$$

**6.5. Zadania**

**6.1.** Udowodnić, że w dowolnej grupie sześciu osób zawsze istnieją albo trzy osoby znające się nawzajem, albo trzy osoby, z których żadna nie zna pozostałych dwóch.

**6.2.** Siedmiu przyjaciół wyjeżdża na wakacje i obiecuje, że każdy z nich wyśle pocztówki trzem spośród pozostałych. Czy może się zdarzyć, że każdy z nich dostanie pocztówki od tych, do których sam napisze?

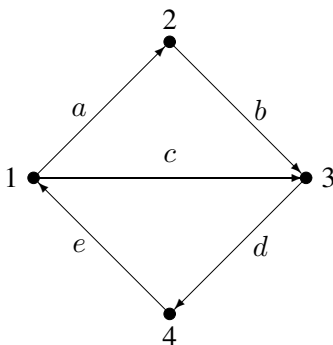
**6.3.** Wyznaczyć macierz incydencji dla grafu  $G$  pokazanego na rysunku 6.29.



Rysunek 6.29. Graf do zadania 6.3

**6.4.** Wyznaczyć macierz incydencji grafu skierowanego  $G$  pokazanego na rysunku 6.30.

**6.5.** Ile niezerowych wyrazów zawiera macierz sąsiedztwa o  $n$  wierzchołkach?



Rysunek 6.30. Graf do zadania 6.4

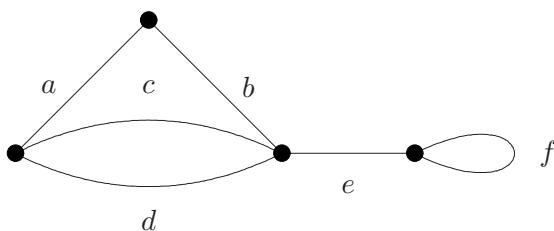
**6.6.** Narysować graf, którego macierz sąsiedztwa ma postać:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**6.7.** Narysować graf skierowany mający macierz sąsiedztwa:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

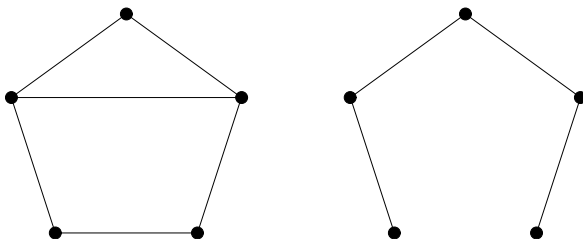
**6.8.** Wyznaczyć macierz cykli grafu  $G$  pokazanego na rysunku 6.31.



Rysunek 6.31. Graf do zadania 6.8

**6.9.** Narysować graf 3-regularny o 6 wierzchołkach.

**6.10.** Narysować dopełnienia grafów pokazanych na rysunku 6.32.



Rysunek 6.32. Grafy do zadania 6.10

**6.11.** Niech  $G$  będzie grafem mającym  $n$  wierzchołków oraz  $m$  krawędzi. Niech  $v$  będzie wierzchołkiem grafu  $G$  stopnia  $k$ , natomiast  $e$  krawędzią w  $G$ . Ile wierzchołków i krawędzi mają grafy  $G \setminus e$ ,  $G \setminus v$  oraz  $G/e$ ?

**6.12.** Znaleźć odległość pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami w grafie Petersena (patrz rysunek 6.21 z przykładu 6.3.7).

**6.13\*.** Udowodnić, że jeśli dwa różne cykle w grafie  $G$  zawierają tę samą krawędź  $e$ , to w grafie  $G$  istnieje cykl, który nie zawiera  $e$ .

**6.14.** Korzystając z twierdzenia Kuratowskiego oraz z wniosku 6.3.4, uzasadnić, że graf Petersena nie jest planarny.

**6.15.** Chemik chce przechować 5 substancji chemicznych  $a, b, c, d, e$  w różnych częściach magazynu. Niektóre z tych substancji reagują gwałtownie w przypadku zetknięcia, a więc powinny być przechowywane w oddalonych miejscach. Gwiazdka \* w tabeli wskazuje te pary substancji, które muszą być rozdzielone.

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	—	*	*	*	—
$b$	*	—	*	*	*
$c$	*	*	*	—	*
$d$	*	*	*	—	*
$e$	—	*	—	*	—

W ilu oddzielnych częściach magazynu możemy przechować te substancje?

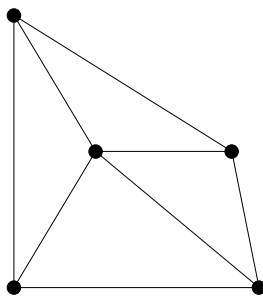
**6.16.** Wyznaczyć wielomian chromatyczny dla cyklu  $C_4$ .

**6.17.** Pokazać, że  $P(C_n; k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ .

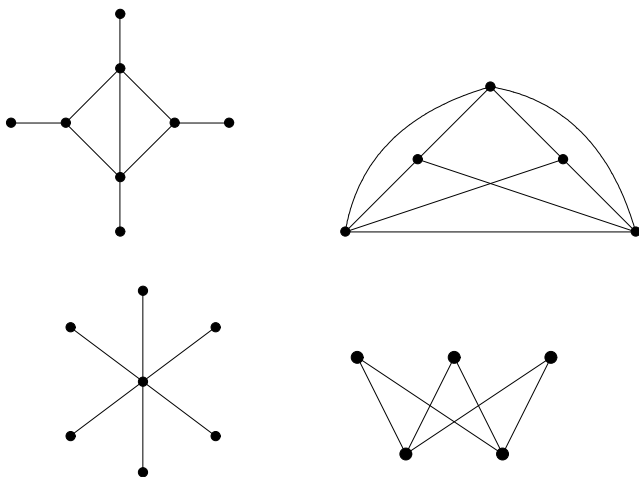
**6.18.** Wyznaczyć wielomian chromatyczny grafu  $G$  pokazanego na rysunku 6.33.

**6.19.** Wyznaczyć liczbę chromatyczną i indeks chromatyczny grafu Petersena.

**6.20.** Znaleźć liczbę chromatyczną grafów pokazanych na rysunku 6.34.

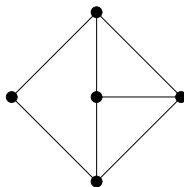


Rysunek 6.33. Graf do zadania 6.18



Rysunek 6.34. Grafy do zadania 6.20

**6.21.** Znaleźć indeks chromatyczny grafu pokazanego na rysunku 6.35.



Rysunek 6.35. Graf do zadania 6.21

**6.22.** Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki grafu  $K_5$  sześcioma kolorami?

**6.23.** Uogólnienie przykładu 6.4.4: pokazać, że  $P(K_n; k) = \frac{k!}{n!}$ .

## 7. Cykle, drzewa, pokrycia

### 7.1. Grafy Eulera i Hamiltona, turnieje

*Graf  
eulerowski*

*Droga Eulera*<sup>16</sup> (ang. *Eulerian trail*, *Eulerian walk*, *Eulerian path*) w grafie skierowanym lub nieskierowanym to droga zawierająca wszystkie krawędzie lub łuki grafu, każdą dokładnie raz. *Cykl Eulera* (ang. *Eulerian cycle*, *Eulerian circuit*, *Eulerian tour*) to cykl zawierający wszystkie krawędzie lub łuki grafu. Graf, w którym istnieje cykl Eulera, nazywamy *grafem eulerowskim* (ang. *Eulerian graph*, *unicursal*), a gdy istnieje tylko droga Eulera – grafem półeulerowskim.

W 1736 roku L. Euler (patrz str. 86) podał warunek konieczny i dostateczny na to, aby graf był eulerowski.

#### **Twierdzenie 7.1.1**

*Graf nieskierowany spójny  $G$  jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty.*

#### **Wniosek 7.1.1.**

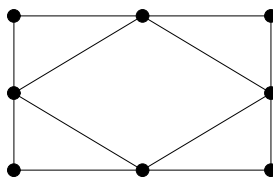
*Graf nieskierowany spójny jest grafem eulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy jego zbiór krawędzi można podzielić na dwa rozłączne cykle (niekoniecznie proste).*

#### **Przykład 7.1.1**

Graf przedstawiony na rysunku 7.1 zawiera cykl Eulera. Zbiór jego krawędzi można przedstawić w postaci sumy dwóch rozłącznych cykli.

#### **Wniosek 7.1.2.**

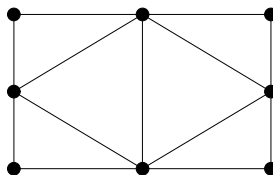
*Graf nieskierowany spójny mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego ma drogę Eulera. Każda taka droga Eulera musi się zaczynać w jednym wierzchołku nieparzystego stopnia i kończyć w drugim takim wierzchołku.*



Rysunek 7.1. Dwa rozłączne cykle

**Przykład 7.1.2**

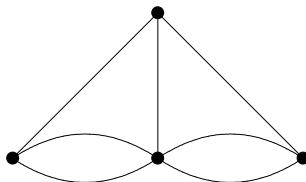
Graf przedstawiony na rysunku 7.2 zawiera drogę Eulera, ponieważ ma dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.



Rysunek 7.2. Dwa wierzchołki stopnia nieparzystego

**Przykład 7.1.3**

Graf przedstawiony na rysunku 7.3 jest schematem połączeń mostami w Królewcu, przedstawionym na początku rozdziału 6 na rysunku 6.2. Jak widać, wszystkie cztery wierzchołki grafu mają nieparzyste stopnie, więc ani cykl, ani droga eulerowska nie istnieją.



Rysunek 7.3. Graf połączeń mostami w Królewcu

*Most* (ang. *bridge*, *isthmus*, *cut-edge*) to krawędź grafu, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych tego grafu. Poniższe twierdzenie podaje algorytm, nazywany *algorytmem Fleury'ego*, który służy do konstrukcji cyklu Eulera w danym grafie eulerowskim.

Algorytm  
Fleury'ego

**Twierdzenie 7.1.2**

Niech  $G$  będzie nieskierowanym grafem eulerowskim. Wtedy następująca konstrukcja jest wykonalna i daje w wyniku cykl Eulera w grafie  $G$ . Zacznij cykl w dowolnym wierzchołku  $u$ , a następnie przechodź krawędzie w dowolnej kolejności, dbając o zachowanie następujących zasad:

- usuwać z grafu przechodzone krawędzie i wierzchołki izolowane w wyniku usuwania tych krawędzi;
- w każdym momencie przechodzić przez most tylko wtedy, gdy nie masz innej możliwości.

**Twierdzenie 7.1.3**

Graf skierowany spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka  $v$  zachodzi  $d^-(v) = d^+(v)$ .

*Graf hamiltonowski* Droga Hamiltona<sup>29</sup> (ang. *Hamiltonian path, traceable path*) w grafie skierowanym lub nieskierowanym  $G = (V, E)$  to droga prosta, która zawiera wszystkie wierzchołki grafu. Cykl Hamiltona (ang. *Hamiltonian cycle, Hamiltonian circuit*) w grafie  $G = (V, E)$  to cykl zawierający wszystkie wierzchołki grafu. Graf, w którym istnieje cykl Hamiltona, nazywamy *grafem hamiltonowskim* (ang. *Hamiltonian graph*).

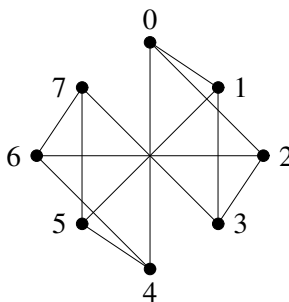
*Kod Graya* Pokażemy teraz przykład związku cyklu Hamiltona w grafie nieskierowanym z kodem Graya<sup>25</sup> przedstawionym w punkcie 3.2 na str. 48. *Kod Graya* (ang. *Gray code*) długości (rzędu)  $n$  to ciąg wszystkich  $n$ -elementowych wektorów binarnych, w których dwa kolejne wektory (oraz pierwszy i ostatni) różnią się dokładnie jednym elementem. Konstrukcja kodu Graya jest następująca. Niech  $V(G)$  będzie rodziną  $\{0, 1\}^n$  wszystkich ciągów cyfr dwójkowych długości  $n$  i połączmy ciągi  $u$  oraz  $v$  krawędzią, jeśli  $u$  oraz  $v$  różnią się dokładnie jedną cyfrą. Kod Graya długości  $n$  w tak otrzymanym grafie Graya  $G$  jest w istocie cyklem Hamiltona w tym grafie.

**Przykład 7.1.4**

Dla  $n = 3$  mamy 8 wektorów binarnych:

0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Odpowiadający im graf Graya przedstawiony jest na rysunku 7.4.



Rysunek 7.4. Graf Graya do przykładu 7.1.4

Cyklem Hamiltona jest na przykład ciąg wierzchołków  $(0, 1, 3, 7, 5, 4, 6, 2, 0)$  lub  $(0, 2, 3, 1, 5, 7, 6, 4, 0)$ .

#### Twierdzenie 7.1.4

Dla grafu pełnego  $K_n$  wiadomo, że:

- jest hamiltonowski dla każdego  $n \geq 3$ ,
- zawiera  $\frac{(n-1)!}{2}$  cykli Hamiltona.

#### Przykład 7.1.5

Graf pełny  $K_4$  ma  $\frac{(4-1)!}{2} = 3$  cykle Hamiltona.

#### Twierdzenie 7.1.5

Niech  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  będzie grafem dwudzielnym. Wtedy:

- jeśli  $G$  ma cykl Hamiltona, to  $|V_1| = |V_2|$ ,
- jeśli  $G$  ma drogę Hamiltona, to  $||V_1| - |V_2|| \leq 1$ .

**Twierdzenie 7.1.6**

Niech  $K_{s,t}$  będzie pełnym grafem dwudzielnym, w którym  $s + t \geq 3$ . Wtedy:

- jeśli  $s = t$ , to  $G$  ma cykl Hamiltona,
- jeśli  $|s - t| \leq 1$ , to  $G$  ma drogę Hamiltona.

Warunki dostateczne na to, aby graf był hamiltonowski, podają poniższe twierdzenia. W 1960 roku Ø. Ore<sup>54</sup> udowodnił poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 7.1.7**

Graf nieskierowany o  $n$  wierzchołkach dla  $n \geq 3$ , w którym  $d(v) + d(w) \geq n$  dla każdej pary wierzchołków  $v$  oraz  $w$  o stopniach  $d(v)$  i  $d(w)$  niepołączonych krawędzią, jest hamiltonowski.

Wnioskiem z twierdzenia 7.1.7 jest wynik, który w 1952 roku pokazał P. Dirac<sup>12</sup>.

**Wniosek 7.1.3.**

Jeżeli graf nieskierowany ma  $n \geq 3$  wierzchołków oraz stopień  $d(v) \geq \frac{n}{2}$  dla każdego wierzchołka, to graf ten jest hamiltonowski.

Innym wnioskiem jest:

**Wniosek 7.1.4.**

Jeżeli graf nieskierowany ma  $n \geq 3$  wierzchołków i co najmniej  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$  krawędzi, to jest hamiltonowski.

W 1969 roku C. Nash-Williams<sup>52</sup> podał dowód poniższego twierdzenia.

**Twierdzenie 7.1.8**

Jeśli  $D$  jest grafem skierowanym bez pętli, w którym stopień wejściowy oraz stopień wyjściowy każdego wierzchołka jest równy co najmniej  $\frac{n}{2}$ , to  $D$  zawiera cykl Hamiltona.

Co więcej, jak pokazali D. Christofides, D. Kühn i D. Osthus, takich rozłącznych cykli Hamiltona jest co najmniej  $\left\lfloor \frac{5n}{224} \right\rfloor$ .

Turnieje

Rozważmy pewien turniej dla grupy graczy, polegający na tym, że każdy gra z każdym, przy czym wynikiem pojedynku jest zwycięstwo jednego z dwóch graczy (remisy są wykluczone). Graf skierowany bez

pętli  $D = (V, E)$  nazywamy *turniejem* (ang. *tournament*), jeśli dla każdej pary wierzchołków  $u$  oraz  $v$  zawiera on dokładnie jeden łuk: albo  $(u, v)$ , albo  $(v, u)$ .

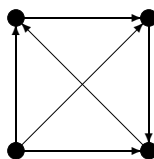
Łuk  $(u, v)$  oznacza że „ $u$  pokonał  $v$ ”. Turniej może reprezentować wyniki spotkań par uczestników w rozgrywkach typu „każdy z każdym” (bez remisów), na przykład turnieju tenisowego lub innej gry, w której nie ma remisów. Turniej możemy opisać w tabeli, przyjmując, że dostajemy 0 punktów za przegraną i 1 punkt za wygraną. W graficznym przedstawieniu turnieju skierowana droga  $p_1, p_2, \dots, p_r$  to ciąg graczy, w którym  $p_1$  pokonał  $p_2$ ,  $p_2$  pokonał  $p_3$ ,  $\dots$ ,  $p_{r-1}$  pokonał  $p_r$ . W 1934 roku L. Rédei<sup>60</sup> udowodnił poniższe twierdzenie.

### Twierdzenie 7.1.9

*Każdy turniej zawiera drogę Hamiltona.*

### Przykład 7.1.6

Graf  $G$  pokazany na rysunku 7.5 jest turniejem.



Rysunek 7.5. Turniej do przykładu 7.1.6

Jego tabela wyników jest jednocześnie macierzą sąsiedztw i ma postać:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Orientacja grafu*

Graf nieskierowany można skierować (zorientować), zastępując każdą krawędź  $\{u, v\}$  łukiem  $(u, v)$  albo łukiem  $(v, u)$ .

Graf  $G$  nazywamy *orientowalnym*, jeśli każdą jego krawędź możemy skierować w taki sposób, by otrzymany digraf stał się *digrafem silnie spójnym* (ang. *strongly connected graph*), to znaczy dla każdej pary wierzchołków istnieje między nimi droga. Każdy graf eulerowski jest orientowalny, gdyż podążając wzdłuż dowolnego cyklu Eulera, możemy orientować krawędzie zgodnie z kierunkiem, w jakim je przecho-

dzimy. Poniższe twierdzenie H. Robbinsa<sup>62</sup> daje warunek konieczny i dostateczny na to, by dany graf był orientowalny.

#### **Twierdzenie 7.1.10**

*Niech  $G$  będzie grafem spójnym. Wówczas graf  $G$  jest orientowalny wtedy i tylko wtedy, gdy każda krawędź  $G$  jest zawarta w co najmniej jednym cyklu.*

#### **Wniosek 7.1.5.**

*W dowolnym turnieju z udziałem  $n$  graczy można przyporządkować graczom etykiety  $p_1, p_2, \dots, p_n$  w ten sposób, że  $p_1$  pokonał  $p_2$ ,  $p_2$  pokonał  $p_3$ ,  $\dots$ ,  $p_{n-1}$  pokonał  $p_n$ .*

W 1982 roku C. Thomassen<sup>70</sup> udowodnił poniższe twierdzenie.

#### **Twierdzenie 7.1.11**

*Każdy turniej zawiera drogę Hamiltona zaczynającą się w wierzchołku, który ma najwyższy stopień wyjściowy, i kończącą się w wierzchołku, który ma najwyższy stopień wejściowy.*

W 1959 roku P. Camion podał następujące twierdzenie.

#### **Twierdzenie 7.1.12**

*Każdy silnie spójny turniej zawiera cykl Hamiltona.*

Główne twierdzenie związane z turniejami dotyczy zbioru możliwych wyników. W turnieju z udziałem  $n$  graczy  $1, 2, \dots, n$  niech  $b_i$  oznacza liczbę graczy pokonanych przez gracza  $i$ : wówczas  $b_1, b_2, \dots, b_n$  są wynikami turnieju (a uporządkowana lista tych wyników jest wektorem wyników). W 1953 roku H. G. Landau podał dowód poniższego twierdzenia.

#### **Twierdzenie 7.1.13**

*Niech  $b_1, b_2, \dots, b_n$  będą liczbami całkowitymi. Liczby te są wynikami pewnego turnieju z udziałem  $n$  graczy wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- (1)  $b_1 + b_2 + \dots + b_n = \binom{n}{2}$ ,
- (2) dla  $1 \leq r \leq n$  każde  $r$  spośród liczb  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sumuje się do co najmniej  $\binom{r}{2}$ .

W 1973 roku M. Meyniel udowodnił następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 7.1.14**

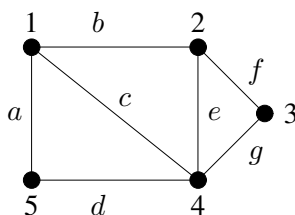
Jeśli  $D$  jest silnie spójnym grafem skierowanym bez pętli o  $n \geq 2$  wierzchołkach i dla dowolnej pary wierzchołków niesąsiednich suma ich stopni wynosi co najmniej  $2n - 1$ , to  $D$  zawiera cykl Hamiltona.

**7.2. Spójność**

- W dalszym ciągu podamy bardziej zaawansowane własności spójności zdefiniowanej w punkcie 6.1. *Zbiorem rozspajającym* (ang. *edge partition set*) grafu spójnego  $G$  nazywamy taki podzbiór jego krawędzi, którego usunięcie pozbawia ten graf spójności. *Cięciem* (ang. *edge cut*) grafu  $G$  jest minimalny zbiór rozspajający ten graf (to znaczy żaden jego podzbiór właściwy nie jest zbiorem rozspajającym). *Spójnością krawędziową* (ang. *edge connectivity*)  $\lambda(G)$  grafu spójnego  $G$  nazywamy najmniejszą liczbę krawędzi, które należy usunąć, by graf przestał być spójny. Graf  $G$  jest  $k$ -spójnym krawędziowo, jeśli  $\lambda(G) \geq k$ . Jeśli cięcie składa się z jednej krawędzi, to jest ona mostem. *Zbiorem rozdzielającym* (ang. *vertex partition set*) grafu spójnego  $G$  nazywamy taki podzbiór jego wierzchołków, którego usunięcie pozbawia ten graf spójności (usuając wierzchołek, usuwamy również wszystkie krawędzie z nim incydentne). Graf nazywamy  $k$ -spójnym, jeśli  $\mu(G) \geq k$ . *Spójnością wierzchołkową* (ang. *vertex connectivity*)  $\mu(G)$  grafu spójnego  $G$  jest najmniejsza moc zbioru rozdzielającego ten graf. Jeśli zbiór rozdzielający składa się z jednego tylko wierzchołka, to ten wierzchołek nazywamy *wierzchołkiem rozcinającym* (ang. *cut vertex*).
- Niezawodność* Spójność wierzchołkowa i krawędziowa mogą być wykorzystywane przy analizowaniu niezawodności sieci, która jest narażona na awarie. Spójność wierzchołkowa określa minimalną liczbę węzłów sieci, które uległy awarii, powodując awarię sieci. Spójność krawędziowa jest równa minimalnej liczbie awarii łączności między węzłami, które spowodują awarię sieci. Niezawodnością sieci jest maksymalna liczba awarii, których wystąpienie nie spowoduje awarii całej sieci. Im większa spójność grafu, tym większa niezawodność sieci.

**Przykład 7.2.1**

W grafie  $G$  na rysunku 7.6 zbiorem rozspajającym jest zbiór  $\{a, c, d\}$ . Cięciami są na przykład zbiory  $\{a, d\}$ ,  $\{b, c, d\}$ , więc  $\lambda(G) = 2$ , czyli graf ten jest 2-spójny krawędziowo. Zbiorami rozdzielającymi są na przykład zbiory  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 4\}$ , więc  $\mu(G) = 2$ , czyli graf jest 2-spójny.



Rysunek 7.6. Graf do przykładów 7.2.1 i 7.3.6

**Twierdzenie 7.2.1**

Dla każdego spójnego grafu  $G$  zachodzi nierówność  $\mu(G) \leq \lambda(G)$ .

*Dowód.* Ze zbioru wierzchołków incydentnych z cięciem o minimalnej mocy usuwamy jeden wierzchołek z każdej pary wierzchołków sąsiednich. Powstaje zbiór rozdziłający graf  $G$  o mocy nie większej niż  $\lambda(G)$ .  $\square$

*Drogi  
rozłączne*

Rozważmy graf spójny  $G = (V, E)$  i parę wyróżnionych, różnych wierzchołków  $u, v \in V$ . Dwie drogi z  $u$  do  $v$  nazywamy *krawędziowo rozłącznymi* (ang. *edge-independent paths*), jeśli nie mają one wspólnej krawędzi. Dwie drogi z  $u$  do  $v$  nazywamy *wierzchołkowo rozłącznymi* (ang. *vertex-independent paths*), jeśli nie mają one wspólnego wierzchołka (z wyjątkiem  $u$  oraz  $v$ ). Zbiorem *rozspajającym wierzchołki  $u$  oraz  $v$*  jest taki podzbiór krawędzi grafu, że każda droga łącząca wierzchołki  $u$  oraz  $v$  zawiera krawędź z tego podzbioru. Zbiorem *rozdzielającym wierzchołki  $u$  oraz  $v$*  jest taki podzbiór wierzchołków należących do  $V \setminus \{u, v\}$ , że każda droga łącząca wierzchołki  $u$  oraz  $v$  zawiera wierzchołek z tego podzbioru.

W 1927 roku zostało sformułowane twierdzenie K. Mengera<sup>46</sup>.

*Twierdzenie  
Mengera*

**Twierdzenie 7.2.2**

Maksymalna liczba dróg wierzchołkowo rozłącznych łączących dwa różne wierzchołki  $v$  oraz  $w$  w grafie spójnym  $G$  jest równa minimalnej liczbie wierzchołków w zbiorze rozdziłającym  $v$  oraz  $w$ .

W 1955 roku L. R. Ford<sup>20</sup> i D. R. Fulkerson<sup>21</sup> udowodnili twierdzenie Mengera w wersji krawędziowej.

**Twierdzenie 7.2.3**

Maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych łączących dwa różne wierzchołki  $v$  oraz  $w$  w grafie spójnym  $G$  jest równa minimalnej liczbie krawędzi w zbiorze rozspajającym  $v$  oraz  $w$ .

**Wniosek 7.2.1.**

*Graf jest  $k$ -spójny krawędziowo wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych jego wierzchołków jest połączona przynajmniej  $k$  drogami krawędziowo rozłącznymi.*

**Wniosek 7.2.2.**

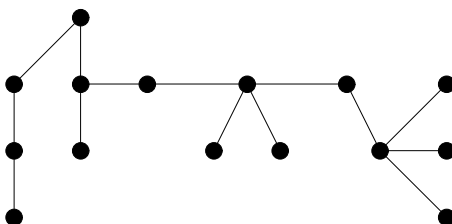
*Graf o co najmniej  $k + 1$  wierzchołkach jest  $k$ -spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych jego wierzchołków jest połączona przynajmniej  $k$  drogami wierzchołkowo rozłącznymi.*

**7.3. Drzewa**

Przypomnijmy, że drzewem nazywamy graf spójny bez cykli (patrz paragraf 6.1). Graf acykliczny (niekoniecznie spójny) to *las* (ang. *forest*).

**Przykład 7.3.1**

Graf  $G$  na rysunku 7.7 jest drzewem.



Rysunek 7.7. Drzewo do przykładu 7.3.1

**Twierdzenie 7.3.1**

*Kiedy graf jest drzewem? Niech  $G$  będzie grafem o  $n$  wierzchołkach. Wówczas równoważne są następujące stwierdzenia:*

1.  $G$  jest drzewem.
2.  $G$  nie zawiera cykli i ma  $n - 1$  krawędzi.
3.  $G$  jest spójny i ma  $n - 1$  krawędzi.
4.  $G$  jest spójny i każda krawędź jest mostem.
5. Dowolne dwa wierzchołki  $G$  są połączone dokładnie jedną drogą.
6. Graf  $G$  nie zawiera cykli i dołączenie dowolnej nowej krawędzi do  $G$  tworzy dokładnie jeden cykl.

*Dowód.* Dla  $n = 1$  równoważność stwierdzeń jest oczywista. Zakładamy, że  $n \geq 2$ .

(1  $\implies$  2) Indukcja względem liczby wierzchołków.

Założmy, że implikacja zachodzi dla dowolnego drzewa o liczbie wierzchołków nie większej od  $n - 1$ . Pokażemy, że zachodzi dla  $n$  wierzchołków. Usuwamy z grafu  $G$  jedną krawędź. Graf  $G$  nie zawiera cykli, więc usunięcie krawędzi powoduje, że  $G$  rozpada się na dwa drzewa, które na mocy założenia indukcyjnego mają razem  $n - 2$  krawędzi. Zatem  $G$  musi mieć  $n - 1$  krawędzi.

(2  $\implies$  3) Gdyby  $G$  nie był spójny to łączna liczba krawędzi w jego składowych będących drzewami byłaby o co najmniej 2 mniejsza od liczby wierzchołków, co przeczy założeniu, że  $G$  ma  $n - 1$  krawędzi.

(3  $\implies$  4) Usuwając dowolną krawędź, dostajemy graf o  $n$  wierzchołkach i  $n - 2$  krawędziach, który nie jest spójny.

(4  $\implies$  5) Z faktu, że  $G$  jest spójny, wynika, że każda para wierzchołków jest połączona co najmniej jedną drogą. Gdyby dla pewnej pary wierzchołków istniały dwie drogi, to powstałby cykl, co jest sprzeczne z założeniem, że każda krawędź jest mostem.

(5  $\implies$  6) Graf  $G$  nie może zawierać cyklu, bo oznaczałoby to, że istnieje para wierzchołków połączona dwiema drogami. Dołączenie nowej krawędzi utworzy cykl. Może być tylko jeden taki cykl, bowiem istnienie dwóch takich cykli oznaczałoby, że w  $G$  istnieje cykl niezawierający dołączonej krawędzi.

(6  $\implies$  1) Graf  $G$  musi być spójny. Gdyby tak nie było, to dodawanie krawędzi łączącej składowe grafu nie powodowałoby powstania cyklu.  $\square$

### **Wniosek 7.3.1.**

*W drzewie o  $n \geq 2$  wierzchołkach co najmniej dwa są stopnia 1.*

*Dowód.*  $\sum_{i \in V} d(i) = 2|E| = 2(n - 1) = 2n - 2.$   $\square$

### **Wniosek 7.3.2.**

*Jeśli graf  $G$  jest lasem, który ma  $n$  wierzchołków oraz  $k$  składowych, to  $G$  ma  $n - k$  krawędzi.*

Drzewo  
spinające

Dla grafu spójnego  $G = (V, E)$  każde drzewo  $T = (V, E')$  takie, że  $E' \subset E$ , nazywamy *drzewem spinającym*, inaczej *dendrytem* lub *drzewem rozpinającym* (ang. *spanning tree*) grafu  $G$ . Graf i jego drzewa spinające mają ten sam zbiór wierzchołków. Jeśli wybierzemy jakiś cykl w grafie spójnym  $G$  i usuniemy którąkolwiek krawędź tego cyklu, to otrzymany graf będzie nadal spójny. Możemy powtarzać tę procedurę z dowolnym z pozostałych cykli dotąd, aż w grafie nie będzie już cykli. Powstanie w ten sposób drzewo, które spina wszystkie wierzchołki grafu. Takie drzewo jest drzewem spinającym grafu  $G$ . Ogólnie, jeśli  $G$  jest dowolnym grafem, który ma  $n$  wierzchołków,  $m$  krawędzi oraz  $k$  składowych, to możemy zastosować tę procedurę do każdej składowej grafu  $G$ . Otrzymany w ten sposób graf nazywamy *lasem spinającym* (ang. *spanning forest*), a łączną liczbę krawędzi usuniętych w czasie tego procesu nazywamy *rzędem cykliczności* lub *liczbą cyklomatyczną* (ang. *circuit rank*, *cyclomatic number*, *nullity*) grafu  $G$  i oznaczamy przez  $\gamma(G)$ . Zauważmy, że  $\gamma(G) = m - n + k$ . Jest to liczba nieujemna. *Rząd grafu  $G$*  (ang. *rank*) to liczba krawędzi w lesie spinającym, oznaczana przez  $r(G)$ . Zauważmy, że  $r(G) = n - k$ .

Las spinający

Liczba  
cyklomatyczna

### Twierdzenie 7.3.2

Jeśli  $T$  jest lasem spinającym grafu  $G$ , to każde cięcie grafu  $G$  ma wspólną krawędź z  $T$ .

*Dowód.* Niech  $C^*$  będzie cięciem grafu  $G$ , którego usunięcie powoduje rozpad pewnej składowej grafu na dwa podgrafy  $H$  i  $K$ . Ponieważ  $T$  jest lasem spinającym, więc  $T$  musi zawierać krawędź łączącą pewien wierzchołek należący do  $H$  z wierzchołkiem należącym do  $K$ . Jest to szukana krawędź.  $\square$

### Twierdzenie 7.3.3

Jeżeli  $T^*$  jest dopełnieniem lasu w grafie  $G$ , to każdy cykl ma wspólną krawędź z  $T^*$ .

Kodrzewo  
i kocykl

*Kodrzewem* (ang. *cotree*) nazywamy dopełnienie drzewa, *kocyklem* (ang. *cocyle*) – minimalne cięcie.

### Twierdzenie 7.3.4

W dowolnym grafie cykl i kocykl mają parzystą liczbę wspólnych elementów.

W 1889 roku A. Cayley<sup>9</sup> udowodnił poniższe twierdzenie.

*Twierdzenie  
Cayleya*

### Twierdzenie 7.3.5

Istnieje  $n^{n-2}$  różnych drzew mających  $n$  wierzchołków.

*Dowód.* Zarys dowodu – konstrukcja kodu Prüfera<sup>58</sup> (ang. *Prüfer sequence, Prüfer code*) dla drzewa

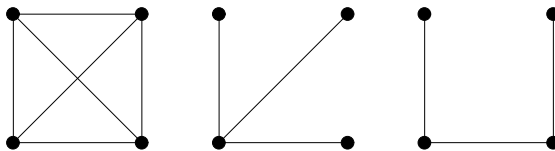
*Kod Prüfera*

Założmy, że wierzchołki grafu są ponumerowane liczbami naturalnymi  $1, \dots, n$ . Pokażemy, że dla  $n \geq 3$  istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy drzewami spinającymi graf pełny  $K_n$  a  $n^{n-2}$  ciągami  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ , gdzie  $a_i$  jest liczbą naturalną spełniającą nierówność  $1 \leq a_i \leq n$ . Założmy, że  $T$  jest drzewem spinającym  $K_n$ . Wybieramy wierzchołek  $v$  o stopniu 1 o najmniejszym numerze i przyjmujemy jako  $a_1$  numer wierzchołka sąsiedniego z  $v$  w drzewie  $T$ . Usuwamy z  $T$  wierzchołek  $v$  wraz z incydentną z nim krawędzią. Powtarzamy powyższe kroki dla  $a_2, a_3, \dots, a_{n-2}$ . Aby ustalić odwrotną odpowiedniość między ciągiem a drzewem spinającym, weźmy ciąg  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$  i zbudujmy odpowiadające mu drzewo  $T$ . Niech  $v$  będzie najmniejszą liczbą ze zbioru  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , która nie występuje w ciągu  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ . Dodajmy do  $T$  krawędź  $\{a_1, v\}$ . Usuwamy  $a_1$  z ciągu i podstawiamy  $N := N \setminus v$ . Powtarzamy postępowanie dla  $a_2, a_3, \dots, a_{n-2}$ . Na końcu łączymy ostatnie dwa wierzchołki, które pozostały w  $N$ .  $\square$

Z twierdzenia 7.3.5 bezpośrednio wynika, że graf pełny  $K_n$  ma  $n^{n-2}$  różnych drzew spinających. Zwróćmy uwagę, że liczymy wszystkie różne drzewa, a nie tylko izomorficzne. Wyjaśnia to przykład 7.3.2.

### Przykład 7.3.2

Graf pełny  $K_4$  ma  $n^{n-2} = 4^2 = 16$  drzew spinających, ale są wśród nich tylko dwa nieizomorficzne. Graf  $K_4$  i jego nieizomorficzne drzewa są przedstawione na rysunku 7.8.



Rysunek 7.8. Graf  $K_4$  i jego nieizomorficzne drzewa spinające – do przykładu 7.3.2

W 1918 roku H. Prüfer pokazał, jak zakodować drzewo o  $n$  wierzchołkach za pomocą ciągu długości  $n - 2$  o wyrazach ze zbioru  $1, 2, \dots, n$ . Wyznaczanie kodu Prüfera dla drzewa  $T$  o  $n$  wierzchołkach opiera się na dowodzie twierdzenia 7.3.5. Aby wyznaczyć kod Prüfera dla danego drzewa  $T$  na zbiorze wierzchołków  $\{1, 2, \dots, n\}$ , należy:

1. Znaleźć wierzchołek o stopniu 1 o najmniejszym numerze, na przykład  $v$ . Niech  $w$  będzie wierzchołkiem połączonym z  $v$ .
2. Zapisać numer  $w$  oraz usunąć wierzchołek  $v$  wraz z krawędzią  $\{v, w\}$ .
3. Jeżeli w drzewie pozostała więcej niż jedna krawędź, to przejść do kroku 1. W przeciwnym razie zakończyć algorytm.

Ponieważ drzewo  $T$  ma  $n$  wierzchołków oraz algorytm wypisuje za każdym razem jedną liczbę dopóty, dopóki nie zostaną dwa wierzchołki, zatem otrzymany ciąg będzie złożony z  $n - 2$  liczb ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Każdy wierzchołek  $v$  występuje w kodzie  $d(v) - 1$  razy.

### Twierdzenie 7.3.6

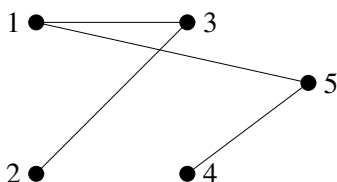
*Każdy ciąg  $n - 2$  liczb wybranych w dowolny sposób ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  jest kodem Prüfera dokładnie jednego drzewa na zbiorze wierzchołków  $\{1, 2, \dots, n\}$ .*

Dla danego ciągu liczb  $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$  wybranych w dowolny sposób ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ , aby wyznaczyć drzewo  $T$ , dla którego ciąg ten jest kodem Prüfera, należy:

1. Zapisać dwie listy:  $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$  oraz  $\{1, 2, \dots, n\}$  i rozpocząć ze zbiorem wierzchołków i pustym zbiorem krawędzi.
2. Wyznaczyć z drugiej listy liczbę najmniejszą, np.  $i$ , która nie występuje na pierwszej liście. Usunąć pierwszy element z pierwszej listy, np.  $j$ , usunąć  $i$  z drugiej listy oraz dodać do zbioru krawędzi krawędź  $\{i, j\}$ .
3. Jeżeli pierwsza lista zawiera co najmniej jedną liczbę, to przejść do punktu 2. W przeciwnym razie, jeżeli pierwsza lista jest pusta, to druga lista będzie się składała z dokładnie dwóch liczb. Dodać do zbioru krawędzi ostatnią krawędź, której wierzchołkami końcowymi są te właśnie liczby, i zakończyć algorytm.

### Przykład 7.3.3

Dla kodu  $(3, 1, 5)$  drzewem jest graf pokazany na rysunku 7.9.



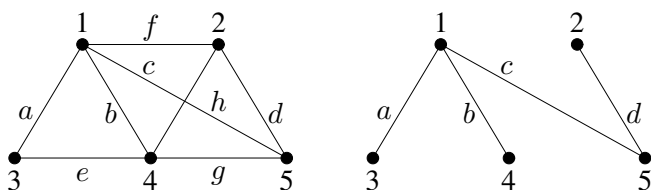
Rysunek 7.9. Graf do przykładu 7.3.3

Dla drzewa spinającego  $T = (V, E')$  grafu  $G = (V, E)$  elementy zbioru  $E'$  nazywamy *gałęziami* drzewa, a elementy zbioru  $E \setminus E'$  *cięciwami* grafu. Jeśli do każdej składowej lasu (każdego drzewa lasu)  $T$  dołączymy dowolną krawędź należącą do grafu  $E$  i nienależącą do  $E'$ , to otrzymamy dokładnie jeden cykl. Zbiór wszystkich cykli utworzonych w ten sposób, to znaczy przez dołączenie do  $E'$  oddzielnie każdej krawędzi grafu  $G$  nienależącej do  $E'$ , nazywamy *fundamentalnym zbiorem cykli* (ang. *fundamental set of cycles*) związanym z  $T$ . Zbiór ten nazywa się też *bazą cykli*. Gdy nie jest istotne, który las spinający został użyty, mówimy po prostu o fundamentalnym zbiorze cykli grafu  $G$ . Liczba cykli w każdym fundamentalnym zbiorze cykli musi być równa rzędowi cykliczności (patrz str. 131) grafu  $G$ .

Fundamentalny zbiór cykli

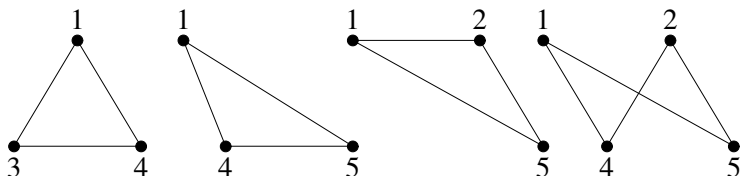
### Przykład 7.3.4

Na rysunku 7.10 przedstawiono graf  $G$  i jedno z jego drzew spinających.



Rysunek 7.10. Graf i jedno z jego drzew spinających do przykładu 7.3.4

Fundamentalny zbiór cykli grafu  $G$  związany z tym drzewem spinającym pokazany jest na rysunku 7.11.



Rysunek 7.11. Fundamentalny zbiór cykli grafu do przykładu 7.3.4

*Fundamentalny  
zbiór cięć*

Usunięcie dowolnej krawędzi z lasu  $T$  dzieli zbiór wierzchołków  $T$  na dwa rozłączne zbiory  $V_1$  oraz  $V_2$ . Zbiór wszystkich krawędzi grafu  $G$  łączących wierzchołki zbioru  $V_1$  z wierzchołkami zbioru  $V_2$  jest *cięciem* w grafie (patrz twierdzenie 7.3.2)  $G$ , a zbiór wszystkich cięć otrzymanych w ten sposób, to znaczy w wyniku usuwania z  $T$  oddzielnie każdej krawędzi, nazywamy *fundamentalnym zbiorem cięć* (ang. *fundamental cutset*) związanym z drzewem  $T$ . Liczba cięć w dowolnym fundamentalnym zbiorze cięć musi być równa rzędowi cięcia grafu  $G$ .

### Przykład 7.3.5

Fundamentalnym zbiorem cięć grafu  $G$  z przykładu 7.3.4 pokazanego na rysunku 7.10, związanym z danym tam drzewem spinającym, jest zbiór składający się z czterech cięć:  $\{a, e\}$ ,  $\{b, e, g, h\}$ ,  $\{c, f, g, h\}$ ,  $\{d, f, h\}$ .

Zbiorem fundamentalnych cykli w odniesieniu do pewnego drzewa spinającego w grafie spójnym są tylko niezależne cykle w grafie, to znaczy takie, dla których w macierzy cykli odpowiadające cyklom wiersze są liniowo niezależne (patrz dodatek A.3). Pozostałe cykle można otrzymać jako liniową kombinację tych cykli. W ten sposób jeżeli w macierzy cykli weźmiemy tylko wiersze odpowiadające fundamentalnym cyklom i opuścimy wszystkie inne wiersze, nie stracimy żadnych informacji. Pominięte wiersze mogą być otrzymane z wierszy odpowiadających zbiorowi cykli fundamentalnych.

Podmacierz macierzy cykli (patrz dodatek A.3), w której wszystkie wiersze odpowiadają zbiorowi fundamentalnych cykli, nazywa się *fundamentalną macierzą cykli* i oznacza  $C_f$ . Permutacja wierszy lub kolumn nie wpływa na  $C_f$ . Jeżeli  $n$  jest liczbą wierzchołków,  $m$  liczbą krawędzi w grafie spójnym  $G$ , to macierz  $C_f$  ma wymiar  $(m - n + 1) \times m$ , ponieważ liczba fundamentalnych cykli jest równa  $m - n + 1$ . Macierz  $C_f$  można przedstawić w postaci:

$$C_f = [I_\mu : C_t],$$

gdzie  $I_\mu$  jest macierzą jednostkową wymiaru  $\mu = m - n + 1$  oraz  $C_t$  jest podmacierzą wymiaru  $\mu \times (n - 1)$  odpowiadającą gałęziom drzewa spinającego.

### Przykład 7.3.6

Dla grafu  $G$  pokazanego na rysunku 7.6 fundamentalnymi cyklami są:

$$C_1 = \{g, f, b, c\}, \quad C_2 = \{e, b, c\}, \quad C_3 = \{a, d, c\}.$$

Macierz cykli jest postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Twierdzenie 7.3.7

Jeżeli  $C$  jest macierzą cykli grafu spójnego  $G$  z  $n$  wierzchołkami oraz  $m$  krawędziami, to rząd macierzy (patrz dodatek A.3)  $C$  jest równy  $m - n + 1$ .

### Twierdzenie 7.3.8

Jeżeli  $C$  jest macierzą cykli grafu  $G$  z  $n$  wierzchołkami,  $m$  krawędziami oraz  $k$  składowymi, to rząd macierzy  $C$  jest równy  $m - n + k$ .

Drzewa  
binarne

Ważną odmianą drzew z korzeniem jest klasa drzew binarnych (ang. *binary tree*). Drzewo binarne zdefiniowane rekurencyjnie na stronie 16 jest drzewem. Drzewo binarne, które nie ma żadnych węzłów, nazywa się drzewem pustym. Jeśli lewe poddrzewo jest niepuste, to korzeń tego poddrzewa nazywa się lewym następnikiem korzenia drzewa głównego. Korzeń niepustego prawego poddrzewa jest prawym następnikiem korzenia drzewa głównego. Jeśli poddrzewo jest puste, to mówimy, że brakuje następnika. Każdy wierzchołek drzewa binarnego może mieć tylko 0, 1 lub 2 poddrzewa.

Drzewa binarne  $T_1$  i  $T_2$  są izomorficzne,  $T_1 \approx T_2$ , gdy  $T_1 = T_2 = \emptyset$  lub gdy  $T_1 = (L_1, r, P_1)$ ,  $T_2 = (L_2, r, P_2)$  oraz  $L_1 \approx L_2$  i  $P_1 \approx P_2$ . Niech  $c_k$  oznacza liczbę nieizomorficznych drzew binarnych o  $k$  wierzchołkach. Oczywiście  $c_0 = 1$  oraz dla  $0 \leq s \leq k$  istnieje  $c_s c_{k-1-s}$  nieizomorficznych drzew binarnych  $(L, r, P)$  takich, że  $L$  ma  $s$  wierzchołków. Wobec tego dla  $k > 0$ :

$$c_k = c_0 c_{k-1} + c_1 c_{k-2} + \cdots + c_{k-1} c_0. \quad (7.3.1)$$

Liczby  
Catalana

Liczby  $c_k$  są liczbami Catalana<sup>7</sup>, wspominaliśmy już o nich w paragrafie 5.4.

Ważnym twierdzeniem, które można wykorzystać do obliczenia liczby drzew spinających dowolnego spójnego grafu prostego, jest macierzowe twierdzenie o drzewach.

Macierzowe  
twierdzenie  
o drzewach

### Twierdzenie 7.3.9

Niech  $G$  będzie spójnym grafem prostym, którego zbiorem wierzchołków jest  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , i niech  $M = [m_{ij}]$  będzie macierzą wymiaru  $n \times n$  taką, że  $m_{ii} = d(v_i)$ ,  $m_{ij} = -1$ , gdy wierzchołki  $v_i$  i  $v_j$  są sąsiednie, oraz  $m_{ij} = 0$  w przeciwnym razie. Wtedy liczba drzew spinających grafu  $G$  jest równa dopełnieniu algebraicznemu dowolnego wyrazu macierzy  $M$  (patrz dodatek A.3).

Z twierdzenia 7.3.9 dostajemy twierdzenie Cayleya:

### Wniosek 7.3.3.

Macierz  $M$  grafu pełnego  $K_n$  ma postać:

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}.$$

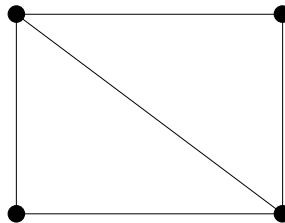
Dopełnienie algebraiczne każdego elementu tej macierzy jest równe  $n^{n-2}$ , co oznacza, że graf pełny ma  $n^{n-2}$  drzew spinających.

### Przykład 7.3.7

Dla grafu  $G$  pokazanego na rysunku 7.12 tworzymy macierz

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

i wyznaczamy dopełnienie algebraiczne dowolnego elementu. Na przykład dopełnienie elementu  $m_{11}$  jest równe 8. Oznacza to, że graf  $G$  ma 8 drzew spinających.



Rysunek 7.12. Graf do przykładu 7.3.7

Wprowadzimy teraz pojęcia centrum i centroidu drzewa. Wierzchołek centralny w drzewie jest określony tak samo jak w dowolnym grafie

(patrz str. 107). Definiujemy wagę wierzchołka  $v$  w drzewie  $T$  wzorem:

$$w(v) = \max_{u \in T} d(u, v),$$

gdzie  $d(u, v)$  jest odległością między  $v$  oraz  $u$ . Wierzchołek  $v$  jest centralny, gdy jego waga  $w(v)$  jest najmniejsza. Centrum to zbiór wierzchołków centralnych.

*Centrum  
drzewa*

### Twierdzenie 7.3.10

*Każde drzewo ma centrum składające się z jednego lub dwóch sąsiednich wierzchołków centralnych.*

Wierzchołek  $v$  w drzewie jest wiszący lub jest liściem, gdy jego stopień  $d(v) = 1$ . Niech wagą  $w_t(v)$  wierzchołka  $v$  w drzewie będzie liczba krawędzi największego poddrzewa, w którym  $v$  jest liściem. Wierzchołek  $v$  jest centroidalny, gdy jego waga  $w_t(v)$  jest najmniejsza. Centroid to zbiór wierzchołków centroidalnych.

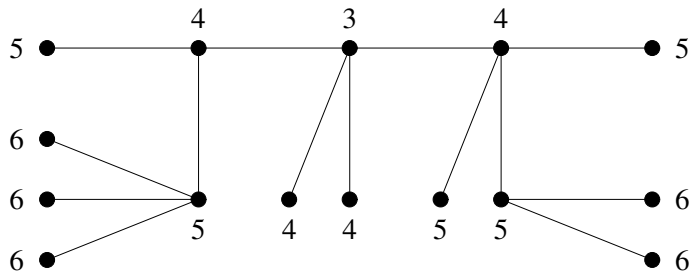
*Centroid  
drzewa*

### Twierdzenie 7.3.11

*Każde drzewo ma centroid składający się z jednego lub dwóch sąsiednich wierzchołków centroidalnych.*

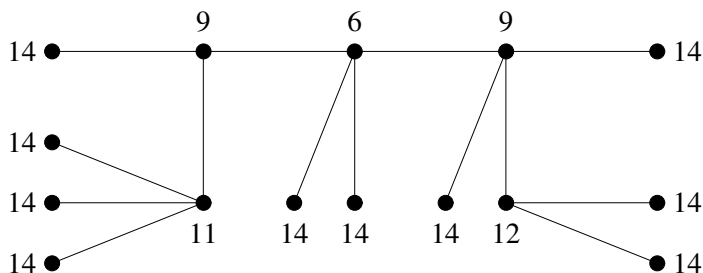
### Przykład 7.3.8

Drzewo przedstawione na rysunkach 7.13 i 7.14 ma jedyny wierzchołek centralny, który jest równocześnie jedynym wierzchołkiem centroidalnym. Drzewo z jednym wierzchołkiem centralnym przedstawiono na rysunku 7.13. Przy wierzchołkach podane są ich wagi  $w_d$ . Wierzchołek centralny ma wagę 3.



Rysunek 7.13. Centrum drzewa – jeden wierzchołek centralny o wadze 3

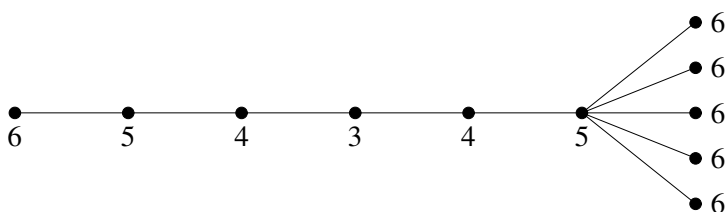
Na rysunku 7.14 pokazano centroid drzewa z rysunku 7.13. Przy wierzchołkach podane są ich wagi  $w_t$ . Wierzchołek centroidalny ma wagę 6.



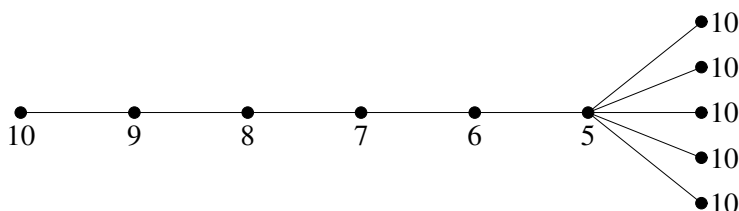
Rysunek 7.14. Centroid drzewa – jeden wierzchołek centroidalny o wadze 6

### Przykład 7.3.9

Drzewo, w którym jedyny wierzchołek centralny jest różny od jedynego wierzchołka centroidalnego, jest przedstawione na rysunkach 7.15 i 7.16. Drzewo z jednym wierzchołkiem centralnym przedstawiono na rysunku 7.15. Przy wierzchołkach podane są ich wagi  $w_d$ . Wierzchołek centralny ma wagę 3. Na rysunku 7.16 pokazano centroid drzewa z rysunku 7.15. Przy wierzchołkach podane są ich wagi  $w_t$ . Wierzchołek centroidalny ma wagę 5.



Rysunek 7.15. Centrum drzewa – jeden wierzchołek centralny o wadze 3



Rysunek 7.16. Centroid drzewa – jeden wierzchołek centroidalny o wadze 5

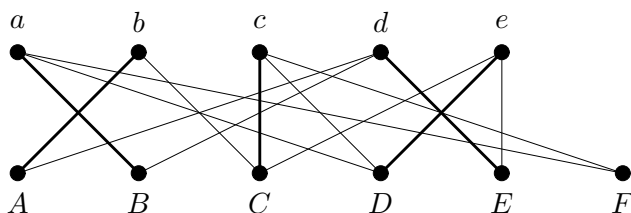
*Promień*  $r(T)$  drzewa to odległość od centrum do najdalszego wierzchołka. Średnica grafu to największa możliwa odległość  $\delta(T)$  dwóch jego wierzchołków. Definicje te pokrywają się z podanymi na str. 107 definicjami promienia i średnicy dla grafów.

## 7.4. Skojarzenia

*Skojarzeniem* (ang. *matching*) w grafie  $G$  nazywamy dowolny podzbiór krawędzi parami nieincydentnych.

### Przykład 7.4.1

Największe skojarzenie w grafie  $G$  pokazanym na rysunku 7.17, czyli skojarzenie o największej liczności, składa się z 5 krawędzi:  $\{a, B\}, \{b, A\}, \{c, C\}, \{d, E\}, \{e, D\}$ .



Rysunek 7.17. Skojarzenie w grafie z przykładu 7.4.1

*Skojarzenie maksymalne* (ang. *maximal matching*) to skojarzenie, do którego nie można dodać żadnej krawędzi. Po dodaniu dowolnej krawędzi spośród pozostałych krawędzi grafu  $G$  przestaje być ono skojarzeniem. Każde skojarzenie największe jest maksymalne, ale nie każde maksymalne jest największe.

### Przykład 7.4.2

W grafie przedstawionym na rysunku 7.18 skojarzeniami są zbiory  $M_i$ , przy czym zbiory  $M_1 - M_4$  są największe (i maksymalne), natomiast  $M_5$  jest skojarzeniem maksymalnym, ale nie największym.

$$M_1 = \{a, d\},$$

$$M_2 = \{a, e\},$$

$$M_3 = \{b, d\},$$

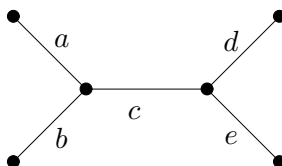
$$M_4 = \{b, e\},$$

$$M_5 = \{c\}.$$

*Skojarzenie doskonałe*

*Skojarzenie doskonałe* (ang. *perfect matching*), inaczej pełne, to skojarzenie, które wykorzystuje wszystkie wierzchołki grafu. Permanent macierzy sąsiedztwa grafu dwudzielnego (patrz wzór (2.2.5)) jest równy liczbie skojarzeń doskonałych grafu.

*Zbiorem wewnątrznie stabilnym* (ang. *independent set*, *stable set*) wierzchołków grafu  $G$  nazywamy dowolny podzbiór wierzchołków



Rysunek 7.18. Skojarzenia największe i maksymalne do przykładu 7.4.2

*Pokrycie  
krawędziowe  
i wierzchołko-  
we*

parami niesąsiednich. *Pokryciem krawędziowym* (ang. *edge cover*) grafu nazywamy taki podzbiór jego krawędzi, że każdy wierzchołek grafu jest incydentny z przynajmniej jedną krawędzią z tego podzbioru. *Pokryciem wierzchołkowym* grafu (ang. *vertex cover*) nazywamy taki podzbiór jego wierzchołków, że każda krawędź grafu jest incydentna z przynajmniej jednym wierzchołkiem z tego zbioru.

### Przykład 7.4.3

Dla grafu z przykładu 7.2.1 pokazanego na rysunku 7.6 skojarzeniem jest na przykład zbiór  $\{a, g\}$ , zbiorem wewnętrznie stabilnym jest  $\{2, 5\}$ . Pokryciem krawędziowym jest zbiór  $\{a, e, g\}$ , a pokryciem wierzchołkowym  $\{1, 3, 4\}$ .

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$\nu(G)$  – maksymalna liczba krawędzi parami nieincydentnych (ang. *matching number*) w grafie  $G$ ,

$\alpha(G)$  – maksymalna liczba wierzchołków niesąsiednich (ang. *stable set number*) w grafie  $G$ ,

$\rho(G)$  – minimalna liczba krawędzi pokrywających wszystkie wierzchołki (ang. *edge cover number*) grafu  $G$ ,

$\tau(G)$  – minimalna liczba wierzchołków pokrywających wszystkie krawędzie (ang. *vertex cover number*) grafu  $G$ .

W 1959 roku T. Gallai<sup>22</sup> udowodnił twierdzenie podające związek pomiędzy powyższymi liczbami.

*Twierdzenie  
Gallaia*

### Twierdzenie 7.4.1

Jeśli graf  $G = (V, E)$  jest grafem bez wierzchołków izolowanych, to:

$$\alpha(G) + \tau(G) = \nu(G) + \rho(G) = |V|.$$

**Wniosek 7.4.1.**

*Maksymalna moc skojarzenia jest nie większa od minimalnej mocy pokrycia wierzchołkowego:*

$$\nu(G) \leq \tau(G).$$

*Maksymalna moc zbioru wewnętrznie stabilnego jest nie większa od minimalnej mocy pokrycia krawędziowego:*

$$\alpha(G) \leq \rho(G).$$

W 1936 roku D. Kőnig<sup>34</sup> podał udowodnione w roku 1931 twierdzenie o maksymalnym skojarzeniu w grafie dwudzielnym. Twierdzenie to niezależnie i w bardziej ogólnej postaci (dla grafów ważonych) podał J. Egerváry<sup>15</sup> w roku 1931.

*Twierdzenie  
Kőniga–  
Egerváryiego*

**Twierdzenie 7.4.2**

*Jeśli graf  $G$  jest dwudzielnym, to minimalna liczba wierzchołków pokrywających wszystkie krawędzie jest równa maksymalnej liczbie krawędzi w skojarzeniu:*

$$\nu(G) = \tau(G).$$

*Twierdzenie  
o kojarzeniu  
małżeństw*

Twierdzenie „o kojarzeniu małżeństw” (ang. *marriage theorem*) daje odpowiedź na pytanie znane jako problem kojarzenia małżeństw: jeśli dany jest skończony zbiór dziewcząt, z których każda zna pewną liczbę chłopców, to jakie warunki muszą być spełnione, by każda dziewczyna mogła poślubić kogoś ze znanych jej chłopców\*.

**Przykład 7.4.4**

Cztery dziewczyny znają pięciu chłopców. Ich wzajemne relacje znajomości są następujące:

$$d_1: c_1, c_4, c_5,$$

$$d_2: c_1,$$

$$d_3: c_2, c_3, c_4,$$

$$d_4: c_2, c_4,$$

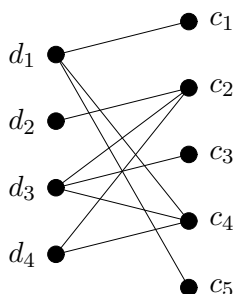
co ilustruje graf  $G$  pokazany na rysunku 7.19.

Jednym z możliwych rozwiązań jest: dziewczyna  $d_1$  wyjdzie za mąż za chłopca  $c_4$ ,  $d_2$  wyjdzie za  $c_1$ ,  $d_3$  za  $c_3$  i  $d_4$  za  $c_2$ .

To zadanie można przedstawić za pomocą grafu dwudzielnego  $G$ , w którym zbiór wierzchołków jest podzielony na dwa rozłączne zbiory

---

\*Trzeba zwrócić uwagę, że ta „politycznie niepoprawna” nazwa twierdzenia powstała w czasach przedfeministycznych.



Rysunek 7.19. Graf do przykładów 7.4.4 i 7.4.5

$V_1$  oraz  $V_2$  odpowiadające dziewczętom i chłopcom, a każda krawędź łączy dziewczynę z chłopcem, którego ona zna.

Aby problem kojarzenia małżeństw miał rozwiązanie, dziewczęta z każdego zbioru  $k$  dziewcząt łącznie muszą znać co najmniej  $k$  chłopców dla wszystkich liczb  $k$  spełniających warunek  $1 \leq k \leq m$ , gdzie  $m$  jest liczbą wszystkich dziewcząt. Ten warunek nazywa się warunkiem kojarzenia małżeństw. W 1935 roku P. Hall<sup>28</sup> udowodnił poniższe twierdzenie znane jako „twierdzenie o małżeństwach”.

*Twierdzenie  
Halla*

### Twierdzenie 7.4.3

*Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by problem kojarzenia małżeństw miał rozwiązanie, jest by dla każdego zbioru  $k$  dziewcząt wszystkie one łącznie znały co najmniej  $k$  chłopców, gdzie  $1 \leq k \leq m$ .*

Twierdzenie to znajduje zastosowania w poważnych zagadnieniach. Na przykład podaje ono warunek konieczny i wystarczający do rozwiązania zadania o przydziale zajęć, polegającego na przydzieleniu pracownikom zajęć zgodnie z ich kwalifikacjami. Bardziej formalnie rozważmy graf dwudzielny  $G = (V_1 \cup V_2, E)$ . Dla podzbioru  $S \subseteq V_1$  określamy przez  $\Gamma(S)$  zbiór wierzchołków  $v_2 \in V_2$ , dla których istnieje  $v_1 \in S$  taki, że  $\{v_1, v_2\} \in E$ .

Twierdzenie Halla można też sformułować w języku grafów dwudzielnych, wtedy przyjmuje ono poniższą postać.

### Twierdzenie 7.4.4

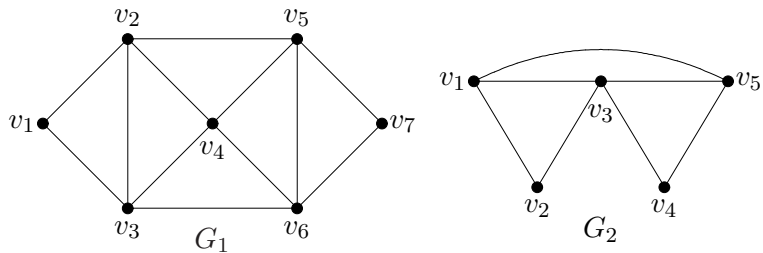
*W grafie dwudzielnym  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  istnieje skojarzenie dla zbioru  $V_1$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $S \subseteq V_1$  zachodzi nierówność  $|\Gamma(S)| \geq |S|$ .*

**Przykład 7.4.5**

W grafie z rysunku 7.19 przyjmijmy  $V_1 = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$  oraz  $V_2 = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ . Wtedy nierówność  $|\Gamma(S)| \geq |S|$  zachodzi zarówno dla każdego zbioru  $S \subseteq V_1$ , jak i dla każdego  $S \subseteq V_2$ .

**7.5. Zadania**

**7.1.** Sprawdzić, czy w grafach pokazanych na rysunku 7.20 istnieje cykl lub droga Eulera; jeśli tak, to je wskazać.



Rysunek 7.20. Grafy do zadania 7.1

**7.2.** Wyznaczyć dla skoczka szachowego trasę po szachownicy tak, by zanim powróci na pole, z którego wystartował, odwiedził dokładnie raz każdy kwadrat szachownicy.

**7.3.** Czy w grafie  $K_{99}$  istnieje cykl Eulera? Jeśli tak, to jaką ma długość?

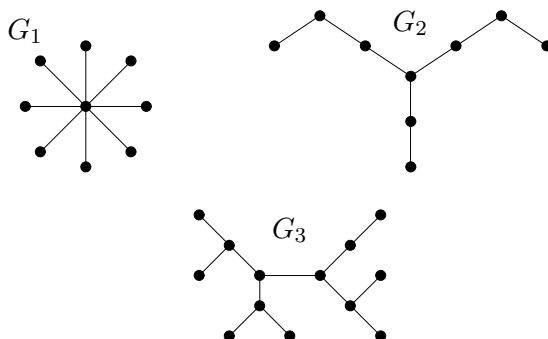
**7.4.** Dla jakich  $n$  graf pełny  $K_n$  jest eulerowski, półeulerowski, hamiltonowski, półhamiltonowski?

**7.5.** Dla jakich  $m$  oraz  $n$  graf pełny dwudzielny  $K_{m,n}$  jest eulerowski, półeulerowski, hamiltonowski, półhamiltonowski?

**7.6.** Znaleźć przykład grafu  $G$ , który jest eulerowski i którego dopełnienie również jest grafem eulerowskim.

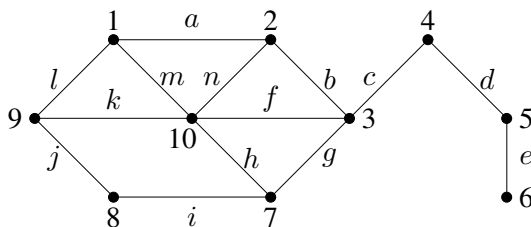
**7.7.** Narysować drzewo, które posiada 6 wierzchołków, w tym 3 liście.

**7.8.** Wskazać centrum, promień i średnicę w grafach:  $G_1$ ,  $G_2$  i  $G_3$  pokazanych na rysunku 7.21.

Rysunek 7.21. Grafy  $G_1 - G_3$  do zadania 7.8

**7.9.** Wyznaczyć liczbę drzew spinających grafu  $K_{3,4}$ .

**7.10.** Dla grafu  $G$  na rysunku 7.22 wyznaczyć rząd cykliczności i przykładowe drzewo spinające oraz fundamentalny zbiór cykli związany z tym drzewem.



Rysunek 7.22. Graf do zadania 7.10

**7.11.** Niech  $\tau(G)$  będzie liczbą drzew spinających grafu spójnego  $G$ . Udowodnić, że jeśli  $e$  jest dowolną krawędzią, to  $\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G/e)$ .

**7.12.** Narysować drzewa o kodach Prüfera:

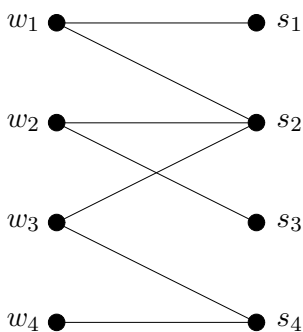
- $(2, 3, 3, 2)$ ,
- $(3, 3, 3, 2, 2)$ ,
- $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$ ,
- $(6, 6, 6, 6)$ .

**7.13.** Ile wierzchołków i ile krawędzi ma drzewo o kodzie Prüfera długości  $k$ ?

**7.14.** W pewnym grafie o 15 wierzchołkach maksymalna moc skojarzenia wynosi 6.

- Ile wynosi minimalna moc pokrycia krawędziowego w tym grafie?
- Czy może istnieć w tym grafie wewnętrznie stabilny zbiór wierzchołków o mocy 8?

**7.15.** Serwis techniczny dysponuje czterema wozami serwisowymi  $w_1, w_2, w_3, w_4$  oraz czterema różnymi ekipami specjalistów  $s_1, s_2, s_3, s_4$ . Serwis otrzymał zadanie wykonania siedmiu napraw w różnych miejscowościach. Każda naprawa wymaga odpowiedniej ekipy i właściwego wozu. Zależność ilustruje graf  $G$  na rysunku 7.23. Jedna ekipa wyposażona w jeden wóz serwisowy może w czasie jednego dnia dokonać tylko jednej naprawy. Ile co najmniej dni potrzeba, aby wykonać to zadanie? Opracować taki plan napraw, aby do minimum skrócić czas niezbędny do jego wykonania.

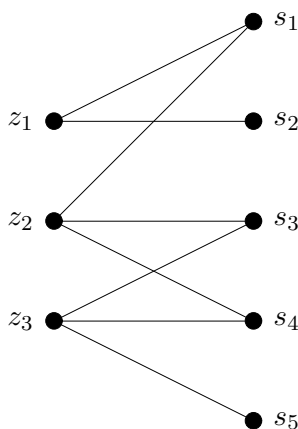


Rysunek 7.23. Graf do zadania 7.15

**7.16.** Specjaliści  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  są członkami trzech zespołów  $z_1, z_2, z_3$ . Przynależność ilustruje graf  $G$  na rysunku 7.24.

Jeden specjalista z każdego zespołu ma być reprezentantem komisji. Czy jest możliwe, aby z każdego zespołu wysłać innego reprezentanta?

**7.17\*\*.** Udowodnić, że liczba  $T(n, r)$  drzew z  $n$  oznaczonymi wierzchołkami, mającymi  $r$  wierzchołków końcowych, określona jest wzorem:



Rysunek 7.24. Graf do zadania 7.16

$$T(n, r) = \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r), \quad n = 1, 2, \dots; \quad r = 0, \dots, n,$$

gdzie  $S(n-2, n-r)$  jest liczbą Stirlinga drugiego rodzaju.

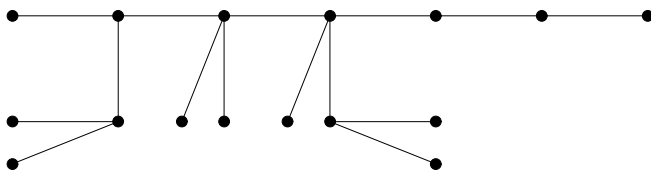
**7.18\*\*.** Korzystając ze wzoru podanego w zadaniu 7.17, udowodnić wzór Cayleya, to znaczy udowodnić, że liczba  $T(n)$  drzew z  $n$  oznaczonymi wierzchołkami jest równa  $T(n) = n^{n-2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**7.19\*\*.** Korzystając ze wzoru podanego w zadaniu 7.17, udowodnić wzór rekurencyjny:

$$\frac{r}{n} T(n, r) = r T(n-1, r) + (n-r) T(n-1, r-1),$$

$n = 3, 4, \dots, r = 1, \dots, n$ .

**7.20.** Pokazać, że dla drzewa  $T$  przedstawionego na rysunku 7.25 dwa wierzchołki centralne są równocześnie dwoma wierzchołkami centrowalnymi.



Rysunek 7.25. Drzewo do zadania 7.20

## 8. Wybrane algorytmy grafowe

Przedstawione w tym rozdziale algorytmy grafowe są jedynie wybranymi algorytmami, które są wykorzystane w dalszej części książki. Pominęto wiele spośród ważnych i szeroko stosowanych. Czytelnik ma jednakże do dyspozycji szeroki wybór książek poświęconych algorytmom, a zwłaszcza algorytmom grafowym. Są to między innymi T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest i C. Stein *Wprowadzenie do algorytmów* [7], T. H. Cormen *Algorytmy bez tajemnic* [6], R. Sedgewick *Algorytmy w C++* [21] i *Algorytmy w C++. Część 5. Grafy* [22], M. M. Sysło *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne* [23] i *Algorytmy* [24] oraz P. Wróblewski *Algorytmy. Struktury danych i techniki programowania* [28]. Bardzo przystępne ujęcie można znaleźć w książce A. Y. Bhargavy [3] *Algorytmy. Ilustrowany przewodnik*.

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, nie analizujemy tutaj zagadnień złożoności prezentowanych algorytmów. Są one przedstawione w postaci opisowej, a nie w postaci programów komputerowych. Zagadnienia te są dokładnie omawiane we wskazanych powyżej pozycjach literaturowych. Podane są w nich też algorytmy w wybranych językach programowania (Pascal, C++, Python).

### 8.1. Algorytmy przeszukiwania

Wiele algorytmów grafowych polega na systematycznym przeszukiwaniu wierzchołków grafu tak, by każdy wierzchołek został odwiedzony dokładnie raz. Najpopularniejsze to algorytm przeszukiwania w głąb (DBF) i algorytm przeszukiwania wszerz (BFS). Możemy je stosować dla dowolnych grafów – skierowanych i nieskierowanych. W dalszych rozważaniach ograniczymy się jednak tylko do grafów nieskierowanych. W wyniku działania algorytmu dostajemy drzewo prze-

szukiwań. Dwie takie procedury są dobrze znane – metoda przeszukiwania w głąb i metoda przeszukiwania wszerz. W obydwu metodach odwiedzamy wszystkie wierzchołki grafu spójnego, ale na ogół w różnej kolejności, przechodząc po różnych krawędziach.

### Algorytm 8.1.1

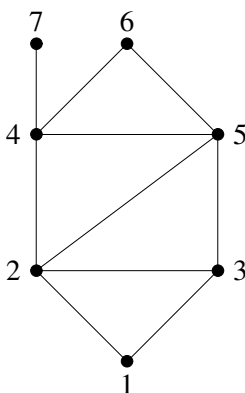
*BFS –  
przeszukiwanie  
wszerz*

*Algorytm przeszukiwania grafu wszerz rozpoczynamy od ustalonego wierzchołka  $u$ . Wierzchołek  $u$ , który zostaje oznaczony jako odwiedzony, umieszczamy w kolejce, a następnie przechodzimy do wszystkich nieodwiedzonych wierzchołków z nim sąsiednich, umieszczamy je w kolejce i oznaczamy jako odwiedzone. Jeśli takich nieodwiedzonych wierzchołków nie ma, to usuwamy z kolejki pierwszy wierzchołek i przechodzimy z niego do wszystkich wierzchołków z nim sąsiednich. Procedurę powtarzamy, aż kolejka będzie pusta. Wtedy wszystkie wierzchołki są odwiedzone.*

Krawędzie grafu, po których przechodzimy do kolejnych wierzchołków, tworzą drzewo przeszukiwań grafu wszerz. Algorytm ten nosi nazwę *algorytmu przeszukiwania wszerz* (ang. *Breadth First Search – BFS*).

### Przykład 8.1.1

Przeszukajmy wszerz graf  $G$  z rysunku 8.1. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że gdy mamy możliwość przejścia w kolejnym kroku do więcej niż jednego wierzchołka, to wybieramy wierzchołek o niższym numerze.

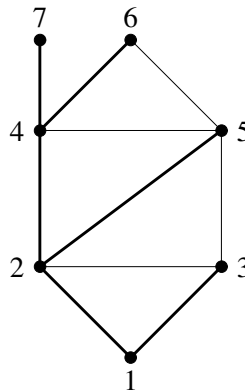


Rysunek 8.1. Graf do przykładów 8.1.1 i 8.1.2

1. Zaczynamy z wierzchołka 1, wstawiamy go do kolejki  $Q = (1)$  iznaczamy go jako odwiedzone:  $W = \{1\}$ .

2. Odwiedzamy wierzchołki sąsiednie 2 oraz 3, wtedy  $Q = (1, 2, 3)$ ,  $W = \{1, 2, 3\}$ , krawędzie drzewa  $T = \{(1, 2), (1, 3)\}$ .
3. Nie ma innych nieodwiedzonych wierzchołków sąsiednich z 1, więc usuwamy go z kolejki  $Q = (2, 3)$ .
4. Odwiedzamy nieodwiedzone wierzchołki sąsiednie z 2: wtedy  $Q = (2, 3, 3, 4, 5)$ ,  $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ .
5. Nie ma dalszych nieodwiedzonych wierzchołków sąsiednich z 2, więc usuwamy go z kolejki  $Q = (3, 4, 5)$ .
6. Nie ma nieodwiedzonych wierzchołków sąsiednich z 3, więc usuwamy go z kolejki  $Q = (4, 5)$ .
7. Odwiedzamy nieodwiedzone jeszcze wierzchołki sąsiednie z 4:  $Q = (4, 5, 6, 7)$ ,  $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 6), (4, 7)\}$ .
8. Nie ma już nieodwiedzonych wierzchołków.

Kolejne wierzchołki drzewa przeszukiwań tego grafu to 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Drzewo to jest przedstawione na rysunku 8.2.



Rysunek 8.2. Drzewo przeszukiwań wszerz grafu z rysunku 8.1

### Algorytm 8.1.2

*DFS –  
przeszukiwanie  
w głąb*

*Algorytm przeszukiwania grafu w głąb rozpoczynamy od ustalonego wierzchołka  $u$ . Wierzchołek  $u$  zostaje oznaczony jako odwiedzony i umieszczony na stosie, po czym przechodzimy do nieodwiedzonego wierzchołka sąsiedniego (powiedzmy, wierzchołka  $v$ ). Jeśli takiego wierzchołka nie ma, to usuwamy  $u$  ze stosu i powtarzamy procedurę, rozpoczynając od wierzchołka ze szczytu stosu. Procedurę powtarzamy, aż stos będzie pusty.*

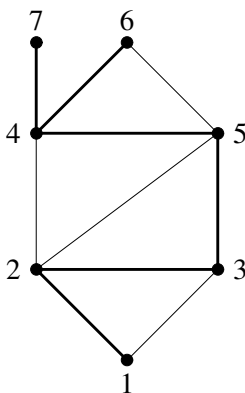
Krawędzie grafu, po których przechodzimy do kolejnych wierzchołków, tworzą drzewo przeszukiwań grafu w głąb. Algorytm ten nosi nazwę *algorytmu przeszukiwania w głąb* (ang. *Depth First Search* – DFS).

### Przykład 8.1.2

Rozpatrzmy przeszukiwanie w głąb tego samego grafu  $G$  z rysunku 8.1. Jak poprzednio, przyjmijmy, że gdy mamy możliwość przejścia w kolejnym kroku do więcej niż jednego wierzchołka, to wybieramy wierzchołek o niższym numerze.

1. Zaczynamy z wierzchołka 1, kładziemy go na stos  $S = (1)$  i zaznaczamy go jako odwiedzone:  $W = \{1\}$ .
2. Kolejno odwiedzamy i kładziemy na stos wierzchołki od 1 do 6:  
 $S = (1, 2, 3, 5, 4, 6)$ ,  $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  
 $T = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 4), (4, 6)\}$ .
3. Wierzchołek 6 nie ma już dalszych sąsiednich nieodwiedzonych, więc zdejmujemy go ze stosu:  $S = (1, 2, 3, 5, 4)$ .
4. Na szczycie stosu jest wierzchołek 4 i z niego odwiedzamy wierzchołek 7:  $S = (1, 2, 3, 5, 4, 7)$ ,  $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  
 $T = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 4), (4, 6), (4, 7)\}$ .
5. Nie ma już nieodwiedzonych wierzchołków.

Kolejne wierzchołki drzewa przeszukiwań tego grafu to 1, 2, 3, 5, 4, 6, 7. Drzewo to jest przedstawione na rysunku 8.3.



Rysunek 8.3. Drzewo przeszukiwań w głąb grafu z rysunku 8.1

Algorytmy BFS i DFS są jednymi z najważniejszych algorytmów w teorii grafów, gdyż są szkieletem wielu innych. Z tego też względu

są dokładnie omówione w wielu podręcznikach. Są to m.in. pozycje [7] oraz [13].

Zauważmy, że wysokość drzewa otrzymanego algorytmem BFS jest nie większa niż wysokość drzewa otrzymanego algorytmem DFS. Skrajnym przypadkiem jest graf pełny  $K_n$ . Wynikiem działania BFS jest gwiazda  $S_n$ , a DFS – droga  $P_n$ .

## 8.2. Minimalne drzewa spinające i minimalne drogi

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem nieskierowanym bez pętli o  $n$  wierzchołkach. Na zbiorze krawędzi  $E$  określamy funkcję o wartościach nieujemnych,  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Wartość  $w(e)$  nazywamy wagą krawędzi  $e$ . Jeśli  $e = \{u, v\}$ , to piszemy po prostu  $w(u, v)$ . Graf  $G$  z określoną funkcją  $w$  nazywa się grafem ważonym.

*Minimalne  
drzewo  
spinające*

Minimalnym drzewem spinającym spójnego grafu  $G$  nazywamy drzewo spinające  $T$  takie, że jego waga

$$w(T) = \sum_{e \in T} w(e) \quad (8.2.1)$$

jest najmniejsza. Gdy  $G$  nie jest spójny, to analogicznie minimalnym lasem spinającym  $T$  grafu  $G$  nazywamy las spinający  $T_G$  taki, że waga  $w(T_G)$  określona wzorem (8.2.1) jest najmniejsza.

*Droga  
minimalna*

Minimalną drogą łączącą wierzchołki  $u$  oraz  $v$  w grafie  $G$ ,  $u \neq v$ , nazywamy drogę  $P(u, v)$  taką, że jej waga

$$w(P(u, v)) = \sum_{e \in P(u, v)} w(e) \quad (8.2.2)$$

jest najmniejsza. Gdy wierzchołki  $u$  oraz  $v$  nie są połączone drogą (należą do różnych składowych grafu  $G$ ), to przyjmujemy  $P(u, v) = \infty$ .

Dla sieci komunikacyjnych lub przepływowych wagi mogą reprezentować pewne wielkości fizyczne, takie jak koszt, odległość, efektywność, pojemność lub niezawodność, przypisane odpowiednim krawędziom. Prosty graf ważony może reprezentować jego macierz wag  $W = [w_{ij}]$ , gdzie  $w_{ij}$  jest wagą krawędzi  $e_{ij}$  między wierzchołkiem  $v_i$  oraz wierzchołkiem  $v_j$ . Wagom nieistniejących krawędzi nadaje się w zależności od zastosowań wartość  $\infty$  lub 0.

Omówimy dalej dwa algorytmy służące do rozwiązywania problemu minimalnego drzewa spinającego. Są nimi algorytm Kruskala i algorytm Prima. Oba algorytmy są przykładami zachłannych algorytm-

mów optymalizacyjnych, które zostaną przedstawione bardziej ogólnie w rozdziale 11. W każdym kroku takiego algorytmu musimy dokonać jednego z wielu możliwych wyborów. Stosując strategię zachłanną, dokonujemy wyboru, który jest w danej chwili najlepszy.

*Algorytm  
Kruskala*

*Algorytm Kruskala*<sup>37</sup> wyznaczający minimalne drzewo spinające ma następującą postać. Niech  $G$  będzie grafem o  $n$  wierzchołkach. Wtedy następujący algorytm daje rozwiązanie problemu minimalnego drzewa lub lasu spinającego:

### Algorytm 8.2.1

1. Sortujemy krawędzie niemalejąco według wag.
2. Wybieramy krawędź  $e_1$  o najmniejszej wadze.
3. Dodajemy krawędzie  $e_2, e_3, \dots, e_{n-1}$ , wybierając za każdym razem nową krawędź o najmniejszej możliwej wadze, która nie tworzy cyklu z dotychczas wybranymi krawędziami  $e_i$ .

Podgraf  $T$  grafu  $G$ , którego krawędziami są  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ , jest szukanym drzewem spinającym. Jeśli  $G$  jest grafem niespójnym, to algorytm Kruskala wyznacza minimalny las.

*Algorytm  
Prima*

Metodą wyznaczania minimalnego drzewa spinającego grafu, która nie wymaga ani sortowania, ani sprawdzania istnienia cykli w każdym kroku, jest *algorytm Prima*<sup>57</sup>, zwany też *algorytmem najbliższego sąsiada*. Dla grafu spójnego przebiega on w następujący sposób.

### Algorytm 8.2.2

1. Niech  $T = \emptyset$ .
2. Wybieramy dowolny wierzchołek początkowy  $v_1 \in T$  i dołączamy go do  $T$ .
3. Wybieramy dowolną krawędź incydentną z  $v_1$  o najniższej wadze i drugi koniec tej krawędzi dołączamy do zbioru  $T$ .
4. Kolejno dla  $i = 2, \dots, n - 1$  wybieramy dowolną krawędź  $e_i$  incydentną z dowolnym wierzchołkiem ze zbioru  $T$  o najniższej wadze taką, że jej drugi koniec nie należy do  $T$ , i dołączamy ten koniec do zbioru  $T$ .
5. Algorytm kończy się, gdy  $T = V$ .

Powyższa procedura wyznacza minimalne drzewo spinające zawierające krawędzie  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ . Najgorszy przypadek dla powyższego algorytmu pojawia się, gdy graf  $G$  jest grafem pełnym. W takiej

sytuacji w każdym kroku algorytmu musimy przeprowadzić maksymalną liczbę porównań, aby znaleźć najbliższy sąsiedni wierzchołek. Jeśli  $G$  jest grafem niespójnym, to dla wyznaczenia minimalnego lasu należy algorytm Prima zastosować dla każdej składowej oddzielnie.

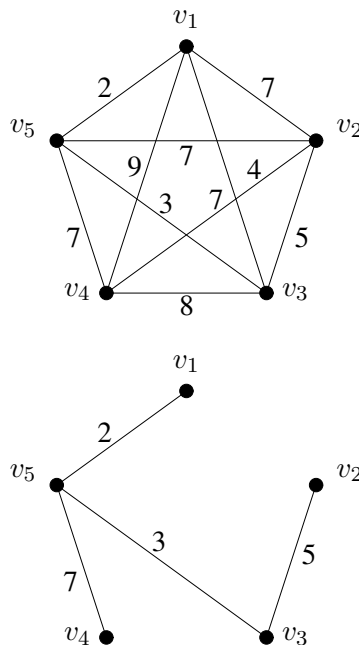
Algorytm zachłanny generujący minimalne drzewo spinające zawdzięczamy J. B. Kruskalowi (1956). Algorytm wyznaczający minimalne drzewo spinające metodą najbliższego sąsiada został odkryty w 1930 roku przez czeskiego matematyka V. Jarníka<sup>32</sup>, a następnie ponownie odkryty w 1957 roku przez R. C. Prima oraz niezależnie w 1959 roku przez holenderskiego informatyka E. Dijkstrę<sup>11</sup>.

### Przykład 8.2.1

Na rysunku 8.4 przedstawiony jest graf  $G = K_5$  z wagami krawędzi. Oznaczmy  $e_{ij} = (v_i, v_j)$ . Krawędzie porządkujemy według rosnących wag:

$$e_{15}, e_{35}, e_{13}, e_{23}, e_{12}, e_{25}, e_{24}, e_{45}, e_{34}, e_{14}.$$

Zgodnie z algorytmem Kruskala wybieramy kolejne krawędzie, które nie tworzą cykli z poprzednio wybranymi. Są to krawędzie  $e_{15}, e_{35}, e_{23}, e_{45}$ . Waga tego drzewa wynosi  $w(T) = 2 + 3 + 5 + 7 = 17$  i jest to minimalne drzewo spinające.



Rysunek 8.4. Graf do przykładu 8.2.1 i jego minimalne drzewo spinające

Stosując algorytm Prima, zaczynamy od dowolnego wierzchołka, na przykład od  $v_2$ . Krawędź o najmniejszej wadze do pozostałych wierzchołków to  $e_{23}$ . Od zbioru wierzchołków  $\{v_2, v_3\}$  do pozostałych prowadzi krawędź  $e_{35}$ , od zbioru  $\{v_2, v_3, v_5\}$  do pozostałych prowadzi krawędź  $e_{15}$ , a w końcu wybieramy krawędź  $e_{45}$ . Dostaliśmy to samo drzewo co otrzymane za pomocą algorytmu Kruskala.

Drzewa minimalne mogą być różne w zależności od użytego algorytmu, sposobu posortowania przy algorytmie Kruskala (gdy wagi niektórych krawędzi są identyczne), wierzchołka startowego i kolejnych wyborów przy algorytmie Prima. Niemniej wagi tak otrzymanych drzew minimalnych są oczywiście takie same.

Długością ważoną drogi  $(u_0, u_1, \dots, u_n)$  w grafie  $G(V, E)$  o nieujemnych wagach krawędzi (łuków)  $e \in E$  jest suma wag krawędzi tej drogi. Do znajdowania najkrótszej drogi ważonej z ustalonego wierzchołka  $u$  w grafie  $G(V, E)$  o nieujemnych wagach krawędzi  $e \in E$  służy algorytm opracowany przez E. Dijkstrę.

*Algorytm  
Dijkstry*

Algorytm ten znajduje w grafie wszystkie najkrótsze drogi pomiędzy wyróżnionym wierzchołkiem  $u$  a wszystkimi pozostałymi, dodatkowo wyliczając długość każdej z tych dróg. Algorytm Dijkstry jest również przykładem algorytmu zachłannego (zobacz na przykład [7], [13]). Sformułujemy go dla grafów nieskierowanych.

### Algorytm 8.2.3

*Tworzymy dwa zbiory wierzchołków  $Q$  i  $S$ . W trakcie algorytmu będziemy tworzyć funkcję  $d(v) \geq 0$  określoną na  $V$  i funkcję  $p(v)$  określoną na  $V \setminus u$  o wartościach w  $V$ . Wierzchołek  $u$  jest jedynym wierzchołkiem początkowym.*

1. Niech  $Q = V$ ,  $S = \emptyset$ .
2. Dla każdego  $v \in V \setminus u$  przyjmujemy  $d(v) = \infty$  oraz  $d(u) = 0$ .
3. Funkcja  $p(v)$  jest niezdefiniowana dla wszystkich  $v \in V$ .
4. Powtarzamy poniższe kroki algorytmu, aż  $Q = \emptyset$ .
  - (a) Wybieramy w  $Q$  wierzchołek o najmniejszym  $d(v)$ , usuwamy go z  $Q$  i dodajemy do  $S$ .
  - (b) Dla każdego  $t \in \Gamma(v) \cap Q$ , jeśli  $d(t) > d(v) + w(v, t)$ , to  $d(t) = d(v) + w(v, t)$ .
  - (c) Określamy  $p(t) = v$ .

W wyniku działania tego algorytmu ciąg wierzchołków  $v, v_1 = p(v), v_2 = p(v_1), \dots, u = p(v_m)$  jest najkrótszą drogą z wierzchołka  $v$  do początkowego wierzchołka  $u$ .

**Uwaga.** Dla wybrania z  $Q$  wierzchołka  $v$  o najmniejszym  $d(v)$  najlepiej przyjąć, że  $Q$  jest uporządkowany tak jak przy przeszukiwaniu grafu metodą BFS (algorytm 8.1.1).

**Przykład 8.2.2**

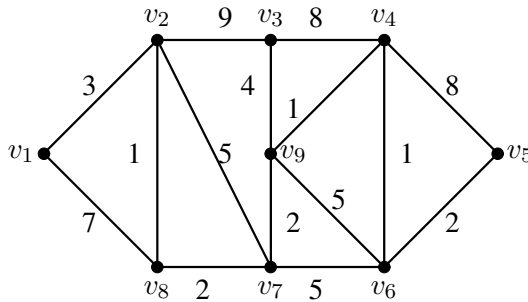
Dla grafu pokazanego na rysunku 8.5 najkrótszą drogą ważoną od  $v_1$  do  $v_5$  jest ciąg  $(v_1, v_2, v_8, v_7, v_9, v_4, v_6, v_5)$ . Ważona długość tej drogi jest równa 12, a długość nieważona jest równa 7. Długość zaś najkrótszej drogi nieważonej jest równa 4, a taką drogą jest na przykład ciąg  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ . Długość ważona tej drogi wynosi 28.

Aby zastosować algorytm Dijkstry, ustalamy najpierw algorytmem BFS zbiór (kolejkę)  $Q$  (wiersz pierwszy) i nadajemy wartości z kroku 2 w algorytmie (wiersz drugi).

W kolejnych krokach algorytmu, idąc z kolejnych wierzchołków  $v$  z kolejki  $Q$ , wierzchołki  $t \in V^+(v)$  grafu otrzymują wartości  $d(t)$ .

	$v_1$	$v_2$	$v_8$	$v_3$	$v_7$	$v_4$	$v_9$	$v_6$	$v_5$
	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_1$	0	3	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_2$	0	3	4	12	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_8$	0	3	4	12	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	0	3	4	12	6	20	16	$\infty$	$\infty$
$v_7$	0	3	4	12	6	20	8	11	$\infty$
$v_9$	0	3	4	12	6	9	8	11	$\infty$
$v_4$	0	3	4	12	6	9	8	10	17
$v_6$	0	3	4	12	6	7	6	10	<b>12</b>
	$v_1$	$v_3$	$v_2$	$v_8$	$v_9$	$v_7$	$v_4$	$v_6$	

Wartości  $p(v)$  dla  $v \in V \setminus v_1$  są podane w ostatnim wierszu.



Rysunek 8.5. Graf do przykładu 8.2.2

## 8.3. Przepływy w sieciach

Sformułowanie problemu przepływów w sieciach jest nieco odmienne od najczęściej spotykanego w literaturze, na przykład w książkach [7] i [13]. Oparte zostało na książce L. Szamkołowicza<sup>68</sup> [25].

Niech  $G = (V', E')$  będzie spójnym grafem skierowanym, acyklicznym, bez wielokrotnych łuków. *Siecią przepływową* nazywamy czwórkę  $S' = (V', E', f, g)$ , w której  $f : V \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{Z}^+$ . Zakładamy, że:

$$f(v) > 0, \text{ gdy } V^+(v) = \emptyset,$$

*Źródło* czyli  $v$  jest wejściem lub źródłem, oraz

$$f(v) < 0, \text{ gdy } V^-(v) = \emptyset,$$

*Ujście* czyli  $v$  jest wyjściem, ściekiem lub drenem.

*Strumień* to dowolna para funkcji  $(\varphi, \psi)$ , gdzie  $\psi : V' \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\varphi : E' \rightarrow \mathbb{Z}^+$ , taka, że:

- $\psi(v) f(v) \geq 0$  dla dowolnego  $v \in V'$ ,
- $|\psi(v)| \leq |f(v)|$  dla dowolnego  $v \in V'$ ,
- $\varphi(e) \leq g(e)$  dla dowolnego  $e \in E'$ ,
- $\sum_{\substack{u \in V^-(v) \\ v \in V'}} \varphi((u, v)) + \psi(v) = \sum_{w \in V^+(v)} \varphi((v, w))$  dla dowolnego  $v \in V'$ .

Funkcje  $f, g, \psi$  oraz  $\varphi$  mają następującą interpretację:

- $f(v)$  jest wydajnością wypływu (gdy  $f(v) > 0$ ) lub wpływu (gdy  $f(v) < 0$ ) wierzchołka  $v$ ,
- $g(e)$  jest przepustowością łuku  $e$ ,
- $\psi$  jest wpływem lub wpływem do  $v$ ,
- $\varphi$  jest przepływem przez łuk  $e$ .

### Przykład 8.3.1

Przyjmijmy, że  $V_s$  jest zbiorem rozproszonych zasobów mocy obliczeniowej, przy czym  $p(u) > 0$  jest zasobem źródła  $u$ .  $V_t$  jest zbiorem odbiorców tych zasobów, przy czym  $r(v)$  jest zapotrzebowaniem odbiorcy  $v$ . Oba zbiory łączą kanały  $(u, v)$  o danych przepustowościach  $c(u, v)$ . Model taki ma zastosowanie w teorii chmur obliczeniowych\*.

\*Joe Weinman, Axiomatic Cloud Theory, 2011,  
[www.joeweinman.com/Resources/Joe\\_Weinman\\_Axiomatic\\_Cloud\\_Theory.pdf](http://www.joeweinman.com/Resources/Joe_Weinman_Axiomatic_Cloud_Theory.pdf).

*Przepustowość tylko na łukach* Najczęściej sieć  $S'$  upraszczamy do sieci  $S = (V, E, c)$ , przyjmując  $V = V' \cup \{s, t\}$ , gdzie  $s \notin V'$  jest wejściem, natomiast  $t \notin V'$  jest wyjściem. Zbiór łuków  $E'$  uzupełniamy o łuki:

$$E_t = \{e = (s, v) : f(v) > 0\}, \quad E_s = \{e = (v, t) : f(v) < 0\},$$

a więc  $E = E' \cup E_s \cup E_t$ . Funkcję  $c$  określamy wzorem:

$$c(e) = \begin{cases} g(u, w) & \text{dla } e = (u, w) \text{ oraz } u, w \in V', \\ f(v) & \text{dla } e = (s, v) \text{ oraz } v \in V', \\ -f(v) & \text{dla } e = (v, t) \text{ oraz } v \in V'. \end{cases}$$

Sieć  $S$  można bezpośrednio określić jako trójkę  $S = (V, E, c)$ , w której  $G = (V, E)$  jest spójnym grafem skierowanym, acyklicznym, bez wielokrotnych łuków oraz o dokładnie jednym wejściu  $s$ , to znaczy  $V^-(s) = \emptyset$ , i dokładnie jednym wyjściu  $t$ ,  $V^+(t) = \emptyset$ . Ponadto  $c : E \rightarrow \mathbb{Z}^+$ . Funkcja  $c$  jest *przepustowością* (ang. *capacity*) sieci  $S$ .

*Strumień* W sieci  $S = (V, E, c)$  *strumień* określa się jako dowolną funkcję  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{Z}^+$  taką, że:

- (A)  $\varphi(e) \leq c(e)$  dla każdego łuku  $e \in E$ ,
- (B) dla dowolnego wierzchołka  $v \in V$  takiego, że  $v \neq s$  oraz  $v \neq t$ , zachodzi równość:

$$\sum_{u \in V^-(v)} \varphi((u, v)) = \sum_{w \in V^+(v)} \varphi((v, w)).$$

### Twierdzenie 8.3.1

*Jeśli  $s$  jest wejściem, natomiast  $t$  jest wyjściem sieci  $S$ , to:*

$$\sum_{v \in V^+(s)} \varphi((s, v)) = \sum_{v \in V^-(t)} \varphi((v, t)) = \Phi_\varphi. \quad (8.3.1)$$

*Strumień maksymalny* Liczba  $\Phi_\varphi$  występująca po prawej stronie wzoru (8.3.1) nazywa się *przepustowością* strumienia  $\varphi$ . *Strumień maksymalny* definiuje się jako strumień o największej przepustowości.

*Przekrój* (ang. *cut*)  $C = (U, W)$  określa się jako parę zbiorów taką, że  $U \cap W = \emptyset$ ,  $U \cup W = V$ ,  $s \in U$ ,  $t \in W$ . Przekrój jest *normalny*, gdy podgrafy o zbiorach wierzchołków  $U$  oraz  $W$  są spójne. Liczbę

$$P(U, W) = \sum_{\substack{u \in U \\ w \in W}} c((u, w)) = P_C \quad (8.3.2)$$

nazywa się *przepustowością przekroju*  $(U, W)$ . *Przekrój minimalny* to przekrój o najmniejszej przepustowości.

*Twierdzenie  
Forda-  
Fulkersona*

W 1955 roku L. R. Ford<sup>20</sup> i D. R. Fulkerson<sup>21</sup> udowodnili twierdzenie wiążące wartości minimalnego przekroju i maksymalnego przepływu.

### Twierdzenie 8.3.2

*W dowolnej sieci przepływowej przepustowość strumienia maksymalnego jest równa przepustowości przekroju minimalnego, to znaczy:*

$$\max_{\varphi} \Phi_{\varphi} = \min_C P_C.$$

*Łańcuch  
nienasycony*

Niech  $l = (e_1, e_2, \dots, e_{m-1})$  będzie łańcuchem o ciągu wierzchołków  $(s = v_1, v_2, \dots, v_m = t)$ , gdzie albo  $e_i = (v_i, v_{i+1})$ , albo  $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ . Jeśli  $e_i = (v_i, v_{i+1})$ , to łuk  $e_i$  jest *zgodnie skierowany* z łańcuchem  $l$ , natomiast jeśli  $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ , wtedy  $e_i$  jest *przeciwnie skierowany* do łańcucha  $l$ . Łańcuch  $l$  jest *nienasycony* przez strumień  $\varphi$ , jeśli dla każdego łuku  $e \in l$  zgodnie skierowanego z  $l$  mamy  $\varphi(e) < c(e)$ , a dla łuku  $e \in l$  przeciwnie skierowanego do  $l$  jest  $\varphi(e) > 0$ .

### Twierdzenie 8.3.3

*Zwiększanie  
strumienia*

*Jeżeli istnieje łańcuch  $l$  nienasycony przez strumień  $\varphi$ , to  $\varphi$  nie jest maksymalny.*

*Dowód.* Niech:

$$\theta = \min_{i,j} (c(e_i) - \varphi(e_i), \varphi(e_j)), \quad (8.3.3)$$

gdzie minimum bierzemy po łukach  $e_i \in l$  zgodnie skierowanych i łukach  $e_j \in l$  przeciwnie skierowanych. Określamy nowy strumień:

$$\varphi'(e) = \begin{cases} \varphi(e) & \text{dla } e \notin l, \\ \varphi(e) + \theta & \text{dla } e \text{ skierowanych zgodnie z } l, \\ \varphi(e) - \theta & \text{dla } e \text{ skierowanych przeciwnie do } l. \end{cases} \quad (8.3.4)$$

Zauważmy, że  $\varphi'$  spełnia (8.3.1), czyli  $\varphi'$  jest strumieniem, oraz:

$$\Phi_{\varphi'} = \Phi_{\varphi} + \theta > \Phi_{\varphi},$$

więc  $\varphi$  nie jest strumieniem maksymalnym. □

Wzory (8.3.3) i (8.3.4) podają metodę zwiększania strumienia, gdy istnieją łańcuchy nienasycone.

**Twierdzenie 8.3.4**

Warunek  
dostateczny

Jeżeli sieć przepływowa nie zawiera żadnego łańcucha nienasyconego przez strumień  $\varphi$ , to  $\varphi$  jest maksymalny.

Wielokrotnie stosując twierdzenie 8.3.3, za każdym razem zwiększamy strumień zgodnie ze wzorem (8.3.4). Procedurę zwiększania strumienia kończymy, korzystając z twierdzenia 8.3.4.

Znajdowanie strumienia maksymalnego rozpoczynamy, stosując algorytm 8.3.1, który wykorzystuje twierdzenie 8.3.5.

**Twierdzenie 8.3.5**

Warunek  
konieczny

Warunkiem koniecznym maksymalności strumienia  $\varphi$  jest nasycenie co najmniej jednego łuku  $e$  (czyli  $\varphi(e) = c(e)$ ) dla każdej drogi łączącej  $s$  oraz  $t$ .

**Algorytm 8.3.1**

Niech  $D$  będzie zbiorem wszystkich dróg łączących wierzchołek  $s$  z wierzchołkiem  $t$ .

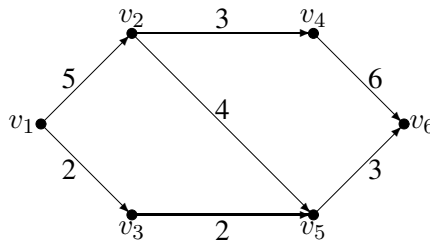
1. Niech  $d_1 = (e_1^1, \dots, e_{m_1}^1) \in D$ . Określamy wartości  $\varphi_1(e_i^1) = \min_i c(e_i^1)$  dla  $e_i^1 \in d_1$  oraz  $\varphi(e) = 0$  dla  $e \notin d_1$ .
2. Niech  $d_j = (e_1^j, \dots, e_{m_j}^j) \in D$  oraz  $d_j$  nie zawiera łuków nasyconych przez  $\varphi_{j-1}$ . Określamy

$$\varphi_j(e_i^j) = \varphi_{j-1}(e_i^j) + \min_i (c(e_i^j) - \varphi_{j-1}(e_i^j))$$

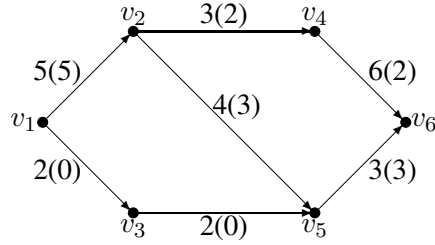
dla  $e_i^j \in d_j$  oraz  $\varphi_j(e) = \varphi_{j-1}(e)$  dla  $e \notin d_j$ . Powtarzamy ten krok dla wszystkich dróg z  $D$ .

**Przykład 8.3.2**

Wykonujemy algorytm 8.3.1 dla kolejnych dróg  $(v_1, v_2, v_4, v_6)$ ,  $(v_1, v_2, v_5, v_6)$ ,  $(v_1, v_3, v_5, v_6)$  sieci z rysunku 8.6.



Rysunek 8.6. Sieć przepływowa z danymi przepustowościami  $c(e)$  na łukach do przykładu 8.3.2



Rysunek 8.7. Sieć przepływowa z rysunku 8.6 z wyznaczonym strumieniem  $\Phi_\varphi = 5$

Strumień przedstawiony na rysunku 8.7 nie jest maksymalny.

Algorytm 8.3.2 znajduje kolejne łańcuchy nienasycone i parametr  $\theta$ , aby zastosować wzór (8.3.3) według poniższych reguł.

### Algorytm 8.3.2

Wierzchołki  $v_0 = s, v_1, \dots, v_{m_1} = t$  otrzymują indeksy  $N$  oraz  $\theta$  – rysunek 8.8.



Rysunek 8.8. Indeksy  $N$  i  $\theta$

1.  $N(v_0) = -1, \theta(v_0) = \infty$ . Pozostałe wierzchołki nie posiadają indeksów.
2. Niech  $\Omega$  będzie zbiorem wierzchołków posiadających indeksy,  $v_i \in \Omega$ . Mamy dwie możliwości nadawania indeksów:

a)

$$v_j \in V^+(v_i) \setminus \Omega, c((v_i, v_j)) - \varphi((v_i, v_j)) > 0$$

$$\implies N(v_j) = i,$$

$$\theta(v_j) = \min\{\theta(v_i), c((v_i, v_j)) - \varphi((v_i, v_j))\},$$

b)

$$v_j \in V^-(v_i) \setminus \Omega, \varphi((v_i, v_j)) > 0$$

$$\implies N(v_j) = i,$$

$$\theta(v_j) = \min\{\theta(v_i), \varphi((v_i, v_j))\}.$$

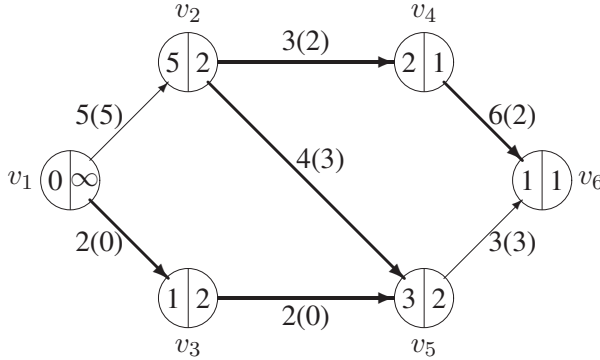
3. Jeżeli  $t \in \Omega$ , to istnieje łańcuch nienasycony:

$$(v_0 = s, v_1, \dots, v_{m-1} = t),$$

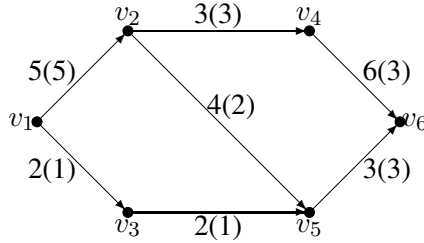
w którym  $i_{k-1} = N(v_{i_k})$  oraz  $\theta = \theta(t)$ .

**Przykład 8.3.3**

Dla sieci i strumienia z rysunku 8.7 znajdujemy za pomocą algorytmu 8.3.2 (indeksując kolejne wierzchołki) łańcuch nienasycony przedstawiony na rysunku 8.9 i parametr  $\theta = 1$ . Modyfikujemy strumień zgodnie ze wzorem (8.3.3). Otrzymujemy strumień przedstawiony na rysunku 8.10.



Rysunek 8.9. Łańcuch nienasycony – pogrubione, do przykładu 8.3.3



Rysunek 8.10. Sieć przepływowa z rysunku 8.6 z wyznaczonym strumieniem  $\Phi_\varphi = 6$

*Skojarzenie  
maksymalne  
w grafie  
dwudzielnym*

Do znajdowania maksymalnego skojarzenia w nieskierowanym grafie dwudzielnym  $G = (V, E)$  możemy zastosować metodę Forda-Fulkersona. Idea rozwiązania polega na skonstruowaniu sieci przepływowej, w której przepływy odpowiadają skojarzeniom. Dla grafu dwudzielnego  $G$  konstruujemy odpowiadającą mu sieć przepływową  $G' = (V', E')$  w następujący sposób. Niech źródło  $s$  oraz ujście  $t$  będą wierzchołkami nie należącymi do  $V$  i niech  $V' = V \cup \{s, t\}$ . Jeśli  $V = L \cup R$  jest podziałem zbioru wierzchołków  $G$  w grafie dwudzielnym,  $L \cap R = \emptyset$ , to zbiorem łuków w sieci  $G'$  jest:

$$S' = \{(s, u) : u \in L\} \cup \{(u, v) : u \in L, v \in R, (u, v) \in E\} \\ \cup \{(v, t) : v \in R\}.$$

Każdemu łukowi przypisujemy jednostkową przepustowość, czyli każdemu skojarzeniu w grafie  $G$  odpowiada bezpośrednio pewien przepływ w sieci  $G'$ . Oznacza to, że maksymalnemu skojarzeniu w grafie dwudzielnym  $G$  odpowiada pewien maksymalny przepływ w sieci przepływowej  $G'$  (patrz twierdzenie 7.2.3). Maksymalne skojarzenie w grafie  $G$  można więc wyznaczyć, wykonując dowolny algorytm obliczania maksymalnego przepływu w sieci  $G'$ . Ostatecznie więc otrzymujemy następujący wniosek.

**Wniosek 8.3.1.**

*Liczność maksymalnego skojarzenia w grafie dwudzielnym  $G$  jest równa wartości maksymalnego przepływu w odpowiadającej grafowi  $G$  sieci  $G'$ .*

Graf dwudzielnym  $G = (V, E)$ , w którym  $V = L \cup R$ , nazywamy  $d$ -regularnym, jeżeli każdy wierzchołek  $v \in V$  ma stopień dokładnie  $d$ . W każdym  $d$ -regularnym grafie dwudzielnym  $|L| = |R|$ . Każdy  $d$ -regularny graf dwudzielnym ma skojarzenie o licznosci  $|L|$ . Minimalny przekrój w odpowiadającej grafowi  $G$  sieci przepływowej ma przepustowość  $|L|$ . L. R. Ford i D. R. Fulkerson pierwsi zbadali wiele problemów dotyczących przepływów sieciowych, włączając w to problemy maksymalnego przepływu i skojarzenia w grafach dwudzielnych.

Dla grafów nieskierowanych również można określić sieć przepływową o wyróżnionych wierzchołkach  $s$  oraz  $t$ , orientując krawędzie grafu skierowanego tak, aby otrzymany graf skierowany był acykliczny o wejściu  $s$  oraz wyjściu  $t$ . Wtedy  $S = (V, E, c)$ , przy czym dla strumienia  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{Z}^+$  warunki (A) i (B) są spełnione dla ustalonej orientacji. Strumień maksymalny jest więc funkcją nie tylko strumienia  $\varphi$ , ale również orientacji. Zauważmy, że orientacja krawędzi określa kierunek przepływu przez krawędź.

Niech  $G$  będzie spójnym grafem nieskierowanym. Niech  $v$  oraz  $w$  będą dwoma wyróżnionymi wierzchołkami w tym grafie. Sieć przepływową określimy, przyjmując  $c = 1$  dla każdej krawędzi. Zauważmy, że w takim przypadku drogi realizujące maksymalny strumień muszą być rozłączne, wartości strumienia dla krawędzi tych dróg są równe 1, a dla pozostałych są równe 0. Wtedy z twierdzenia Forda-Fulkersona otrzymujemy następujący wniosek.

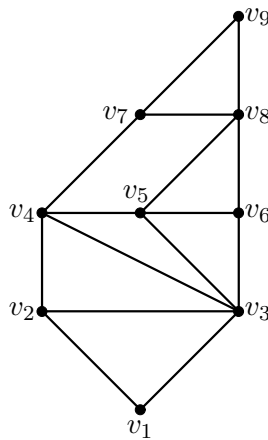
**Wniosek 8.3.2.**

*Maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych łączących dwa różne wierzchołki  $v$  oraz  $w$  w grafie spójnym  $G$  jest równa minimalnej liczbie krawędzi w zbiorze rozspajającym  $v$  oraz  $w$ .*

Powyższy wniosek to twierdzenie Mengera<sup>46</sup> w wersji krawędziowej (patrz twierdzenie 7.2.3).

**8.4. Zadania**

**8.1.** W grafie z rysunku 8.11 przeszukać wierzchołki algorytmami BFS i DFS, rozpoczynając algorytm z wierzchołka  $v_1$ , a następnie  $v_9$ . Przyjąć strategię wyboru następnego wierzchołka o a) najniższym, a potem b) o najwyższym numerze spośród możliwych wierzchołków do wyboru. Narysować otrzymane drzewa.

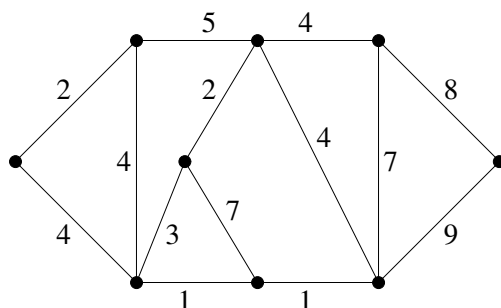


Rysunek 8.11. Graf do zadania 8.1

**8.2.** Wyznaczyć wagę minimalnego drzewa spinającego grafu  $G$  pokazanego na rysunku 8.12:

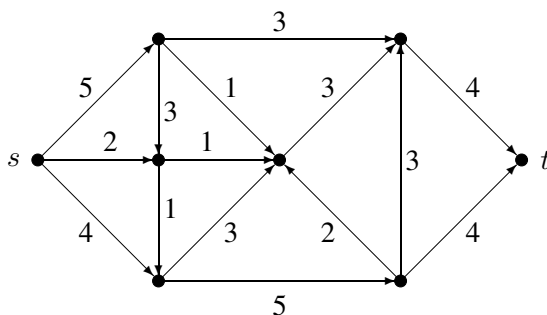
- używając algorytmu Kruskala,
- używając algorytmu Prima.

**8.3.** Niech  $G = K_5$  o zbiorze wierzchołków  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Krawędź  $e = (i, j)$  ma wagę  $w(e) = (i + j) / (ij)$ . Narysować graf  $G$  z naniesionymi wagami. Znaleźć drzewo spinające o najmniejszej wadze za pomocą algorytmów Prima i Kruskala.



Rysunek 8.12. Graf do zadania 8.2

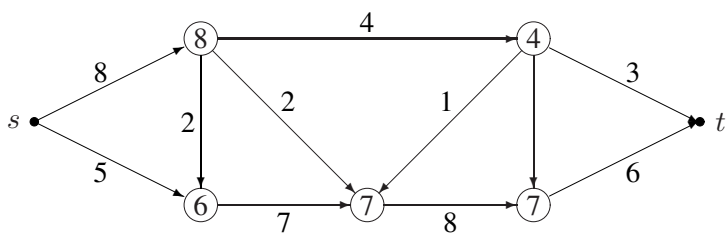
**8.4.** Na rysunku 8.13 pokazana jest sieć przepływowa z jednym źródłem  $s$  oraz jednym odpływem  $t$ . Liczby obok łuków oznaczają pojemności tych łuków.



Rysunek 8.13. Sieć przepływowa z jednym źródłem i jednym odpływem do zadania 8.4

Zbudować maksymalny przepływ od  $s$  do  $t$  i podać wartość tego przepływu na poszczególnych łukach. Znaleźć minimalny przekrój rozdzielający źródło  $s$  od odpływu  $t$ .

**8.5.** Na rysunku 8.14 pokazana jest sieć przepływowa, w której oprócz ograniczeń na przepustowość łuków podane są ograniczenia na przepustowość  $c(v) > 0$  węzłów (wierzchołków)  $v$  (liczby w kółkach).



Rysunek 8.14. Sieć do zadania 8.5

Zbudować sieć przepływową  $S$  z ograniczeniami tylko na pojemność łuków dla sieci na podanym rysunku i znaleźć maksymalny przepływ od  $s$  do  $t$ .

## **Część III**

# **Ogólne struktury kombinatoryczne**



## 9. Ciała i przestrzenie wektorowe

### 9.1. Ciała skończone

Zbiór  $X$  z działaniami  $+$  oraz  $\cdot$  tworzy ciało  $(X, +, \cdot)$ , gdy spełnione są warunki (w zapisie, zgodnie ze zwyczajem, na ogół nie piszemy kropki):

**C1**  $a + b = b + a$ ,

**C2**  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,

**C3**  $ab = ba$ ,

**C4**  $(ab)c = a(bc)$ ,

**C5**  $a(b + c) = ab + ac$ ,

**C6** istnieje zero:  $a + 0 = 0 + a = a$ ,

**C7** istnieje element przeciwny:  $a + (-a) = 0$ ,

**C8** istnieje jedynka:  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ,

**C9** istnieje element odwrotny:  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$  dla  $a \neq 0$ ,

**C10**  $0 \neq 1$ .

Jeżeli spełnione są warunki C1, C2, C6, C7, to  $(X, +)$  jest grupą adytywną przemienną (abelową); jeżeli spełnione są warunki C4, C8, C9, to  $(X, \cdot)$  jest grupą multiplikatywną (niekonieczne przemienną); jeśli dodatkowo jest spełniony warunek C3, to  $(X, \cdot)$  jest grupą multiplikatywną przemienną. Rzędem grupy skończonej jest liczba jej elementów. Więcej wiadomości o grupach podano przy okazji omawiania permutacji na str. 31.

*Ciała nieskończone*

Zbiory liczb wymiernych, rzeczywistych i zespolonych ze zwykłymi działaniami dodawania  $+$  i mnożenia  $\cdot$ , zerem 0 i jedynką 1 są ciałami. Ciała te są oczywiście nieskończone.

Jeżeli spełnione są warunki C1–C8 i C10, to  $(X, +, \cdot)$  jest pierścieniem. Jeżeli zbiór  $X$  jest skończony, to ciało nazywamy skończonym (odpowiednio pierścieniem skończonym i grupą skończoną).

**Twierdzenie 9.1.1**

Jeżeli  $p$  jest liczbą pierwszą, to działania  $+$  oraz  $\cdot$  określone jako reszty z dzielenia przez  $p$  w zwykłym dodawaniu i dzieleniu w zbiorze liczb całkowitych (czyli działania  $\bmod p$ ) tworzą ciało skończone na zbiorze  $X = \{0, 1, \dots, p-1\}$ .  $0$  jest zerem, a  $1$  – jedyneką w tym ciele.

Pierścień  $\mathbb{Z}_p$

Jeżeli  $p$  nie jest liczbą pierwszą, to  $X$  z działaniami dodawania i mnożenia  $\bmod p$  jest pierścieniem  $\mathbb{Z}_p$ , ale nie jest ciałem.

Charakterystyka ciała skończonego jest najmniejszą liczbą całkowitą  $k$  taką, że  $\sum_{i=1}^k 1 = 0$ .

**Twierdzenie 9.1.2**

Charakterystyka dowolnego ciała skończonego jest liczbą pierwszą.

Ciała Galois

Można udowodnić, że każde ciało skończone ma  $q = p^m$  elementów, gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą, a  $m$  jest liczbą naturalną. Wszystkie ciała skończone o tej samej liczbie elementów są izomorficzne. Takie  $q$ -elementowe ciała nazywane są ciałami Galois<sup>23</sup> (ang. *Galois field*) i oznaczane przez  $GF(q)$ . Dla  $m > 1$  są to ciała wielomianów, ale nie wszystkich – problemu tego nie będziemy jednak tu rozważać. Gdy  $q = p^m$ , to charakterystyka takiego ciała wynosi  $p$ .

**Przykład 9.1.1**

Jeśli  $q = 2$ , to – zgodnie z twierdzeniem 9.1.1 –  $(\{0, 1\}, +, \cdot)$  jest ciałem (ciałem binarnym).

**Przykład 9.1.2**

Jeżeli  $q = 3$ , to zbiór reszt z dzielenia przez 3, czyli  $(\{0, 1, 2\}, +, \cdot)$ , jest ciałem. Można go też przedstawić inaczej, jako  $(\{-1, 0, 1\}, +, \cdot)$ , z działaniami określonymi tabelami:

$+$	$-1$	$0$	$1$
$-1$	$1$	$-1$	$0$
$0$	$-1$	$0$	$1$
$1$	$0$	$1$	$-1$

$\cdot$	$-1$	$0$	$1$
$-1$	$1$	$0$	$-1$
$0$	$0$	$0$	$0$
$1$	$-1$	$0$	$1$

Podajmy teraz przykład, który jest wzorem dla ogólnej konstrukcji ciała  $GF(q^n)$ . Wielomian o współczynnikach z pewnego ciała jest nierozkładalny nad tym ciałem, gdy nie da się go przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia co najmniej pierwszego.

**Przykład 9.1.3**

Ciało  $GF(2^2)$  Zbudujmy ciało o  $2^2 = 4$  elementach:

$$0, 1, x, x + 1.$$

Wielomian  $x^2 + x + 1$  jest nierozkładalny nad  $\mathbb{Z}_2$ , bo:

$$x \cdot x = x^2,$$

$$x(x + 1) = x^2 + x,$$

$$(x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1.$$

Następnie:

$$x \cdot x \mod (x^2 + x + 1) = x + 1,$$

$$x(x + 1) \mod (x^2 + x + 1) = 1,$$

$$(x + 1)(x + 1) \mod (x^2 + x + 1) = x.$$

Stąd dla  $GF(4)$  otrzymujemy następujące tabele działań:

+	0	1	$x$	$x + 1$
0	0	1	$x$	$x + 1$
1	1	0	$x + 1$	$x$
$x$	$x$	$x + 1$	0	1
$x + 1$	$x + 1$	$x$	1	0

·	0	1	$x$	$x + 1$
0	0	0	0	0
1	0	1	$x$	$x + 1$
$x$	0	$x$	$x + 1$	1
$x + 1$	0	$x + 1$	1	$x$

Natomiast dla  $\mathbb{Z}_4$  otrzymujemy:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Pominiemy tu zagadnienia, jak znajdować wielomiany nierozkładalne nad ciałami  $GF(q)$ . Szczególne przypadki  $GF(8)$  i  $GF(9)$  pozostaną do rozważenia w zadaniach 9.1 – 9.5.

## 9.2. Skończone przestrzenie wektorowe

*Przestrzenie liniowe*

Przestrzeń liniowa  $n$ -wymiarowa nad ciałem  $GF(q)$  jest określona jako zbiór wektorów  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , gdzie  $x_i \in GF(q)$ . Działaniami są:

- dodawanie  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ ,
- mnożenie przez liczbę  $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ , gdzie  $\lambda \in GF(q)$ .

Przestrzeń taką oznaczmy przez  $V(n, q)$ .

*Kraty podprzestrzeni* Rodzina wszystkich podprzestrzeni przestrzeni  $V(n, q)$  tworzy kratę  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(n, q)$ , gdzie dla podprzestrzeni  $Z$  oraz  $T$  określamy:

$$Z \wedge T = Z \cap T,$$

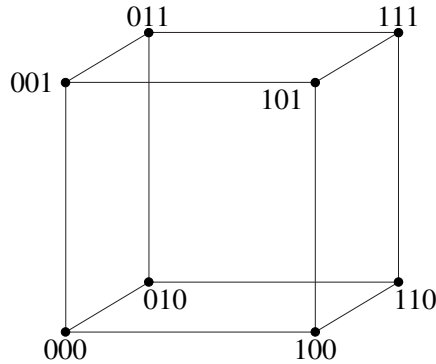
$$Z \vee T = \{z + t : z \in Z, t \in T\}.$$

Zero  $\mathbf{0}$  kraty  $\mathcal{L}$  to przestrzeń zerowa składająca się z wektora  $(0, \dots, 0)$ . Jedyneką  $\mathbf{1}$  kraty  $\mathcal{L}$  jest cała przestrzeń  $V(n, q)$ .

*Atomy kraty* Atomem  $a$  kraty  $\mathcal{L}$  nazywa się taki jej element, że  $\mathbf{0} \preccurlyeq a$ ,  $\mathbf{0} \neq a$  oraz jeśli  $\mathbf{0} \preccurlyeq b \preccurlyeq a$ , to albo  $b = \mathbf{0}$ , albo  $b = a$ . Inaczej mówiąc, atomami kraty są elementy będące następnikami zera. W kracie podprzestrzeni atomami są podprzestrzenie jednowymiarowe.

### Przykład 9.2.1

Elementami przestrzeni  $V(3, 2)$  są ciągi zero-jedynkowe długości 3. Przestrzeń ta jest przedstawiona na rysunku 9.1, a krata jej podprzestrzeni – na rysunku 9.2.



Rysunek 9.1. Przestrzeń  $V(3, 2)$

Oznaczmy:

$$H_1 = \{000, 001, 010, 011\},$$

$$H_2 = \{000, 001, 100, 101\},$$

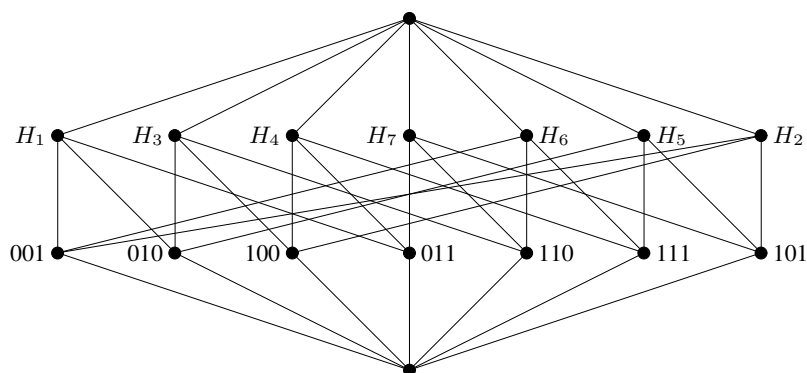
$$H_3 = \{000, 010, 100, 110\},$$

$$H_4 = \{000, 100, 011, 111\},$$

$$H_5 = \{000, 010, 101, 111\},$$

$$H_6 = \{000, 001, 110, 111\},$$

$$H_7 = \{000, 011, 110, 101\}.$$

Rysunek 9.2. Krata podprzestrzeni  $V(3, 2)$ 

Dla  $V(3, 2)$  podprzestrzeniami dwuwymiarowymi są:

$H_1, H_2, H_3$  – ściany zawierające  $(0, 0, 0)$ ,

$H_4, H_5, H_6$  – „płaszczyzny” przechodzące przez krawędź zawierającą  $(0, 0, 0)$  i krawędź równoległą do niej zawierającą  $(1, 1, 1)$ ,

$H_7$  – „płaszczyzna”  $\{000, 011, 110, 101\}$ .

Oznaczmy dla rzeczywistych  $x \geq 0$ :

$$(x)_q = \frac{q^x - 1}{q - 1}. \quad (9.2.1)$$

W szczególności  $(0)_q = 0$  oraz  $(1)_q = 1$ , niezależnie od wartości  $q$ .

### Własność 9.2.1

Jeśli  $n$  jest liczbą naturalną, to  $(n)_q$  określone wzorem (9.2.1) jest liczbą atomów w kratce podprzestrzeni przestrzeni  $V(n, q)$  nad ciałem  $GF(q)$  i wyraża się wzorem:

$$(n)_q = \sum_{j=0}^{n-1} q^j = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}. \quad (9.2.2)$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$(x)_q^k = (x)_q (x-1)_q \dots (x-k+1)_q, \quad (x)_q^0 = 1, \quad (9.2.3)$$

$$(k)_q! = (k)_q^k, \quad (0)_q! = 1, \quad (9.2.4)$$

$$\binom{x}{k}_q = \frac{(x)_q^k}{(k)_q!} \quad \binom{x}{0}_q = 1, \quad \binom{x}{k}_q = 0 \text{ dla } k < 0 \text{ lub } k > x. \quad (9.2.5)$$

Wtedy też:

$$\binom{x}{1}_q = (x)_q, \quad \binom{x}{2}_q = \frac{(x)_q (x-1)_q}{q+1}. \quad (9.2.6)$$

*Symbol Gaussa* Symbol  $\binom{x}{k}_q$  nazywa się symbolem Gaussa<sup>24</sup>. Ma on własności podobne do symbolu Newtona. Wzór (9.2.3) jest odpowiednikiem wzoru (2.1.1), wzór (9.2.4) jest odpowiednikiem silni, natomiast wzór (9.2.5) jest odpowiednikiem wzoru (3.1.1).

Ze wzorów (9.2.3) – (9.2.5) wynika, że:

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \dots (q - 1)}. \quad (9.2.7)$$

Wzór (9.2.7) może służyć do obliczenia wartości symbolu Gaussa, jednak znacznie lepiej jest skorzystać ze wzorów (9.2.8) i (9.2.9) z własności 9.2.2. Wzory te są odpowiednikami wzorów (3.1.6) i (3.1.7).

### Własność 9.2.2

Dla  $k = 1, 2, \dots$  oraz  $x \geq k$  mamy:

$$\binom{x}{k}_q = \binom{x}{x-k}_q, \quad (9.2.8)$$

a także

$$\binom{x+1}{k+1}_q = \binom{x}{k}_q + q^{k+1} \binom{x}{k+1}_q. \quad (9.2.9)$$

Twierdzenie 9.2.1 jest odpowiednikiem twierdzenia 3.1.1. Ze wzoru (9.2.8) można otrzymać trójkąt analogiczny do trójkąta Pascala (patrz zadanie 9.7).

**Twierdzenie 9.2.1**

Liczba podprzestrzeni wymiaru  $k$  przestrzeni  $V(n, q)$ , czyli elementów kraty rzędu  $k$ , jest równa  $\binom{n}{k}_q$ .

Jeżeli przyjmiemy, że  $q$  jest nieujemną liczbą rzeczywistą (niekoniecznie całkowitą, a tym bardziej potęgą liczby pierwszej), to możemy zbadać granice wyrażeń zawierających  $q \rightarrow 1$ .

**Twierdzenie 9.2.2**

Dla  $n \geq 0$ :

$$\lim_{q \rightarrow 1} (x)_q = x, \quad \lim_{q \rightarrow 1} (x)_q^k = x^k, \quad \lim_{q \rightarrow 1} \binom{x}{k}_q = \binom{x}{k}.$$

Twierdzenie to uzasadnia nazwę  $q$ -analogów dla występujących tu obiektów zawierających  $q$  w definicji i dla ich własności. Używając tej terminologii, wzór (9.2.10) w twierdzeniu 9.2.3 jest  $q$ -analogiem wzoru (3.1.3), czyli wzoru dwumianowego.

**Twierdzenie 9.2.3**

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q (x-1)(x-q) \dots (x-q^{k-1}). \quad (9.2.10)$$

## 9.3. Skończone geometrie rzutowe i afiniczne

Formalnych podwalin i podstawowych zasad tego, co znane jest teraz jako geometria rzutowa, dostarczył G. Desargues<sup>10</sup>. Zawdzięczamy mu stwierdzenie: „dwie linie proste, które się nie pokrywają, przecinają się tylko w jednym punkcie”.

*Geometrie  
rzutowe*

Geometrią rzutową  $(X, \mathcal{L})$  nazywa się zbiór punktów  $X$  i rodzinę podzbiorów  $\mathcal{L}$  zwanych prostymi, które spełniają warunki:

- (i) dowolne dwa punkty leżą na dokładnie jednej prostej,
- (ii) dla dowolnych czterech punktów  $x, y, z, t$  nieleżących na jednej prostej, jeżeli prosta  $xy$  przecina prostą  $zt$ , to prosta  $xz$  przecina prostą  $yt$ ,
- (iii) każda prosta ma co najmniej trzy punkty.

Stosujemy tu następującą terminologię:

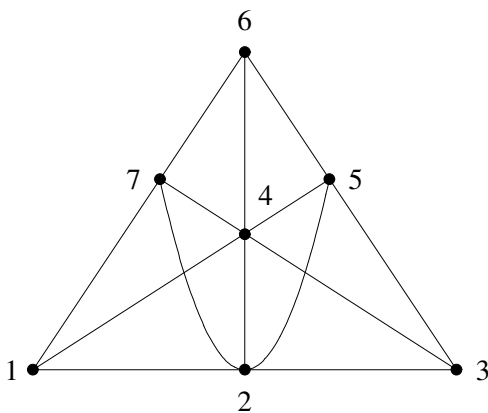
- gdy  $x \in L$ , to mówimy, że punkt  $x$  leży na prostej  $L \in \mathcal{L}$ ,
- piszemy  $xy = L$ , gdy  $x \neq y$  i  $L$  jest (jedyną) prostą, na której leżą punkty  $x$  i  $y$ ,
- gdy  $L_1 \cap L_2 = x$ , to mówimy, że prosta  $L_1$  przecina prostą  $L_2$  (w punkcie  $x$ ).

Jeżeli za punkty przyjmujemy atomy kraty podprzestrzeni  $V(n, q)$ , to podprzestrzenie wymiaru 2 są prostymi. Taką geometrię oznaczamy symbolem  $PG(n-1, q)$  i nazywamy geometrią rzutową wymiaru  $n-1$  lub rzędu  $n$ . Ponieważ proste w  $PG(n-1, q)$  są podprzestrzeniami wymiaru 2 przestrzeni  $V(n, q)$ , to ze wzoru (9.2.2) wynika, że zawierają  $(2)_q = q+1$  punktów. Geometrie  $PG(2, q)$  nazywamy płaszczyznami.

Przyjmijmy następującą numerację atomów kraty z rysunku 9.2:

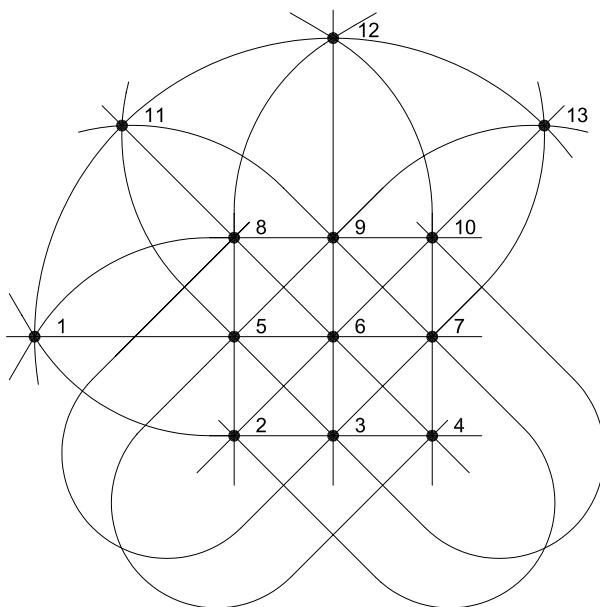
$$\begin{aligned} 001 &\equiv 1, \\ 010 &\equiv 2, \\ 100 &\equiv 4, \\ 011 &\equiv 3, \\ 110 &\equiv 6, \\ 111 &\equiv 7, \\ 101 &\equiv 5. \end{aligned}$$

Geometrię rzutową  $PG(2, 2)$  nazywamy płaszczyzną Fano (rysunek 9.3).



Rysunek 9.3. Płaszczyzna Fano  $PG(2, 2)$

Na rysunku 9.4 przedstawiona jest płaszczyzna  $PG(2, 3)$ .

Rysunek 9.4. Płaszczyzna rzutowa  $PG(2, 3)$ 

Zwróćmy uwagę, że wymiar i rząd geometrii rzutowej różnią się o 1. Na przykład prosta jest jednowymiarowa i ma rząd równy 2 (dwa punkty wyznaczają prostą), natomiast płaszczyzna jest dwuwymiarowa i ma rząd równy 3 (trzy punkty wyznaczają płaszczyznę).

Bezpośrednio z definicji  $PG(n-1, q)$  i twierdzenia 9.2.1 wynika następujące twierdzenie.

### **Twierdzenie 9.3.1**

*Liczba podprzestrzeni rzędu  $k$  geometrii rzutowej  $PG(n-1, q)$  jest równa  $\binom{n}{k}_q$ .*

*Płaszczyzny  
rzutowe*

Płaszczyzny rzutowe można określić aksjomatycznie w następujący sposób:

- (i) dowolne dwa punkty leżą na dokładnie jednej prostej,
- (ii) każde dwie różne proste mają dokładnie jeden punkt wspólny,
- (iii) istnieją cztery różne punkty, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej.

Istnieją płaszczyzny rzutowe nieizomorficzne z  $PG(2, q)$ , natomiast geometrie rzutowe, które nie są płaszczyznami, są izomorficzne z  $PG(n-1, q)$  dla pewnych  $n$  oraz  $q$ . Nie jest natomiast rozstrzygnięte zagadnienie, czy istnieją płaszczyzny rzutowe rzędu innego niż potęga liczby pierwszej. Wiadomo, że jeśli istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu  $n$  oraz  $n \equiv 1 \pmod{4}$  lub  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , to  $n$  jest sumą kwadratów dwóch liczb pierwszych. Pierwszymi takim liczbami są 6, 10 oraz 12. Dla  $n = 6$  płaszczyzna rzutowa nie istnieje. Dopiero w roku 1989 C. Lam<sup>40</sup> pokazał, że nie istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu 10.

### Twierdzenie 9.3.2

*Płaszczyzna  $PG(2, q)$  zawiera  $q^2 + q + 1$  punktów oraz  $q^2 + q + 1$  prostych. Każda prosta zawiera dokładnie  $q + 1$  punktów, a przez każdy punkt przechodzi  $q + 1$  prostych.*

*Geometrie  
afiniczne*

Geometrią afiniczną  $(X, \mathcal{L})$  nazywa się zbiór punktów  $X$  i rodzinę podzbiorów  $\mathcal{L}$  zwanych prostymi, które spełniają warunki:

- (i) dowolne dwa punkty leżą na dokładnie jednej prostej,
- (ii) jeśli  $L$  jest prostą, a punkt  $x$  nie leży na  $L$ , to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez  $x$ , która nie przecina  $L$ ,
- (iii) istnieją cztery punkty, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej.

Geometrię afiniczną  $AG(n, q)$  konstruujemy następująco. Niech  $V(n, q)$  będzie  $n$ -wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem  $GF(q)$ , a  $Z$  – jej podprzestrzenią. Relacja  $\equiv$  określona wzorem:

$$a \equiv b \iff a - b \in Z \quad (9.3.1)$$

jest relacją równoważności, a więc dzieli przestrzeń  $V(n, q)$  na rozłączne warstwy. Wymiar warstwy określamy jako wymiar podprzestrzeni  $Z$ . Zbiór wszystkich warstw uzupełniony o zbiór pusty tworzy kratę. Atomy w kracie warstw tej relacji są punktami geometrii afinicznej  $AG(n, q)$ , natomiast warstwy wymiaru 2 są prostymi.

### Twierdzenie 9.3.3

*Liczba  $k$ -wymiarowych podprzestrzeni  $n$ -wymiarowej geometrii  $AG(n, q)$  jest równa  $q^{n-k} \binom{n}{k}_q$ .*

*Płaszczyzny  
afiniczne*

Płaszczyzny afiniczne można określić aksjomatycznie w następujący sposób:

- (i) dowolne dwa punkty leżą na dokładnie jednej prostej,

- (ii) dla każdej prostej  $L$  i każdego punktu  $p \notin L$  istnieje dokładnie jedna prosta  $L'$  równoległa do  $L$  ( $L' \parallel L$ ) taka, że  $p \in L$ ,
- (iii) istnieją cztery różne punkty, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej.

Proste  $L_1$  oraz  $L_2$  na płaszczyźnie są równoległe, gdy  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ . Istnieją płaszczyzny afiniczne nieizomorficzne z  $AG(2, q)$ , natomiast geometrie afiniczne, które nie są płaszczyznami, są izomorficzne z  $AG(n-1, q)$  dla pewnych  $n$  oraz  $q$ .

### Twierdzenie 9.3.4

*Płaszczyzna  $AG(2, q)$  zawiera  $q^2$  punktów oraz  $q^2 + q$  prostych. Każda prosta zawiera dokładnie  $q$  punktów, a przez każdy punkt przechodzi  $q + 1$  prostych.*

### Przykład 9.3.1

Płaszczyznę  $AG(2, 3)$  na 9 elementach można skonstruować następująco:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Prostymi są wszystkie wiersze i kolumny macierzy  $A$  oraz takie trójki, że żadne ich dwa elementy nie leżą w jednym wierszu lub w jednej kolumnie macierzy  $A$ .

## 9.4. Zadania

**9.1.** Sprawdzić, że wielomian  $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2$  jest nierozkładalny nad ciałem  $\mathbb{Z}_2$ . Wypisać wszystkie elementy ciała  $GF(8)$  rozumianego jako ciało reszt z dzielenia przez  $x^3 + x + 1$  w pierścieniu  $\mathbb{Z}_2$ .

**9.2.** Sprawdzić, że wielomian  $x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3$  jest nierozkładalny nad ciałem  $\mathbb{Z}_3$ . Wypisać wszystkie elementy ciała  $GF(9)$  rozumianego jako ciało reszt z dzielenia przez  $x^2 + x + 2$  w pierścieniu  $\mathbb{Z}_3$ .

**9.3.** W ciele  $GF(8)$  z zadania 9.1 obliczyć:

$$(1+x) + (x+x^2), \quad (1+x)(x+x^2), \quad x^4.$$

**9.4.** W ciele  $GF(9)$  z zadania 9.2 obliczyć:

$$(1+x) + (2+x), \quad (2+x) - (1+2x),$$

$$(1+x)(1+2x), \quad x^3.$$

**9.5.** W ciele  $GF(8)$  z zadania 9.1 rozwiązać równania kwadratowe o niewiadomej  $t$ :

$$\begin{aligned} t^2 + (x^2 + 1)t + 1 &= 0, & t^2 + t + x &= 0, \\ t^2 + t + x &= 0, & t^2 + t + (x^2 + 1) &= 0, \\ t^2 + (x^2 + 1)t + (x^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

**9.6\*.** Udowodnić wzory (9.2.2) i (9.2.9).

**9.7.** Korzystając z własności 9.2.2, zbudować  $q$ -analog trójkąta Pascala dla  $q = 2$  oraz  $q = 3$  i  $k = 0, 1, \dots, 7$ .

**9.8.** Udowodnić, że:

$$\binom{n}{0}_q < \binom{n}{1}_q < \dots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}_q = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}_q > \dots > \binom{n}{n}_q.$$

**9.9.** Udowodnić, że dla  $q > 1$ :

$$q^{k(n-k)} \leq \binom{n}{k}_q \leq q^{k(n-k+1)}.$$

**9.10.** Udowodnić, że liczba różnych trójkątów (tzn. trójek punktów, z których żadne dwa nie leżą na jednej prostej) płaszczyzny  $PG(2, q)$  jest równa  $(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2$ .

**9.11.** Udowodnić, że liczba różnych czworokątów (tzn. czwórek punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej) płaszczyzny  $PG(2, q)$  jest równa  $(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2(q - 1)^2$ .

# 10. Matroidy

## 10.1. Podstawy

Teoria matroidów zajmuje się badaniem zbiorów z określonymi na nich strukturami niezależności. Uogólnia pojęcie liniowej niezależności w przestrzeniach liniowych oraz wyniki dotyczące grafów i transwersal. Daje możliwość głębszej analizy wielu problemów oraz pozwala w prostszy sposób udowodnić wiele twierdzeń teorii grafów i teorii transwersal. Matroidy odgrywają ważną rolę w rozwoju pojęć kombinatorycznych.

Pojęcie matroidu wprowadził H. Whitney<sup>75</sup> jako uogólnienie przestrzeni liniowych\*. Niezależność elementów matroidu odpowiada liniowej niezależności wektorów w przestrzeniach wektorowych.

*Bazy matroidu* Niech  $E$  będzie zbiorem skończonym. Matroidem (matroidem baz) nazywamy parę  $M = (E, \mathcal{B})$  taką, że niepusta rodzina  $\mathcal{B}$  podzbiorów zbioru  $E$  spełnia następujące postulaty:

- $(b_1)$  jeśli  $B \in \mathcal{B}$ ,  $B' \subset B$ , to  $B' \in \mathcal{B}$ ,
- $(b_2)$  jeśli  $B_1 \in \mathcal{B}$ ,  $B_2 \in \mathcal{B}$ ,  $e \in B_1$ , to istnieje  $f \in B_2$  taki, że  $(B_1 \setminus e \cup f) \in \mathcal{B}$ .

Podzbiory  $B$  należące do rodziny  $\mathcal{B}$  nazywamy bazami. Bazy w skończonych przestrzeniach liniowych nad dowolnymi ciałami, w szczególności nad ciałem  $GF(q)$ , mają własności  $(b_1)$  i  $(b_2)$ . Własność  $(b_2)$  nosi nazwę własności Steinitza<sup>66</sup> lub własności wymiany.

---

\*H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, „American Journal of Mathematics” 1935, 57, s. 509–533.

**Przykład 10.1.1**

Niech  $E = \{a, b, c, d, e\}$ ,

$$\mathcal{B}_1 = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{\{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}.$$

Zarówno  $M_1 = (E, \mathcal{B}_1)$ , jak i  $M_2 = (E, \mathcal{B}_2)$  są matroidami.

**Twierdzenie 10.1.1**

*Wszystkie bazy matroidu  $M$  mają tę samą liczbę elementów równą  $r$ .*

Liczbę  $r$  nazywa się rzędem matroidu.

*Zbiory  
niezależne*

Zbiorem niezależnym nazywa się dowolny podzbiór dowolnej bazy. Rodzinę zbiorów niezależnych oznaczamy przez  $\mathcal{I}$ . Parę  $M = (E, \mathcal{I})$  nazywa się matroidem zbiorów niezależnych. Zbiorem zależnym nazywamy każdy zbiór, który nie jest niezależny.

*Cykle*

Cyklem  $C$  nazywa się każdy minimalny zbiór zależny, czyli taki zbiór zależny, którego każdy podzbiór właściwy  $A \subset C$  jest już niezależny. Rodzinę cykli oznaczamy przez  $\mathcal{C}$ . Parę  $M = (E, \mathcal{C})$  nazywa się matroidem cykli. Pętlą jest cykl jednoelementowy  $\{e\}$ , czyli  $\{e\} \in \mathcal{C}$ .

**Przykład 10.1.2**

W matroidzie  $M_1$  z przykładu 10.1.1 cyklami są zbiory trzelementowe niezawierające  $a$ . Takim zbiorem jest na przykład  $C = \{b, c, d\}$ . Wszystkich cykli jest  $\binom{4}{3} = 4$ . W matroidzie  $M_2$  cyklami są wszystkie zbiory trzelementowe niezawierające elementu  $a$  oraz  $\{a\}$  będący pętlą.

*Rząd*

Rzędem  $\rho(A)$  zbioru  $A \subseteq E$  nazywa się liczbę elementów maksymalnego zbioru niezależnego  $I \subseteq A$ , czyli takiego zbioru niezależnego, który nie jest podzbiorem właściwym żadnego innego podzbioru niezależnego. Parę  $M = (E, \rho)$  nazywa się matroidem z funkcją rzędu. Oczywiście rząd  $r$  matroidu  $M$  jest równy  $\rho(M)$ .

**Przykład 10.1.3**

W matroidzie  $M_1$  wszystkie podzbiory dwuelementowe są niezależne. Zbiory trzelementowe są niezależne, o ile nie zawierają elementu  $a$ . Pozostałe zbiory trzelementowe są cyklami, więc nie są niezależne, ale ich dwuelementowe podzbiory są niezależne. Stąd

$$\rho_1(A) = \begin{cases} |A| & \text{dla } |A| \leq 2, \\ 2 & \text{dla } |A| > 2 \text{ oraz } a \notin A, \\ 3 & \text{dla } |A| > 2 \text{ oraz } a \in A. \end{cases}$$

Analogicznie rozumując otrzymujemy

$$\rho_2(A) = \begin{cases} |A| & \text{dla } |A| \leq 2 \text{ oraz } a \notin A, \\ |A| - 1 & \text{dla } |A| \leq 2 \text{ oraz } a \in A, \\ 2 & \text{dla } |A| > 2. \end{cases}$$

*Rozpięcie*

Rozpięciem  $\sigma(A)$  zbioru  $A \subseteq E$  nazywa się maksymalny zbiór  $B$  taki, że  $A \subseteq B$  i  $\rho(A) = \rho(B)$ . Parę  $M = (E, \sigma)$  nazywa się matroidem rozpięć. Zbiory  $A \subseteq E$  takie, że  $\sigma(A) = A$ , nazywa się zbiorami domkniętymi.

#### Przykład 10.1.4

Postępując jak w przykładzie 10.1.3, ale szukając tym razem maksymalnych zbiorów  $\sigma(A)$  o tym samym rzędzie co  $A$ , otrzymujemy dla matroidów  $M_1$  oraz  $M_2$  z przykładu 10.1.1 rozpięcia  $\sigma_1$  oraz  $\sigma_2$ :

$$\sigma_1(A) = \begin{cases} A & \text{dla } |A| \leq 1, \\ A & \text{dla } |A| = 2 \text{ oraz } a \in A, \\ E \setminus a & \text{dla } |A| > 2 \text{ oraz } a \notin A, \\ E & \text{dla } |A| > 3 \text{ oraz } a \in A, \end{cases}$$

$$\sigma_2(A) = \begin{cases} A & \text{dla } |A| \leq 1, \\ A & \text{dla } |A| = 2 \text{ oraz } a \in A, \\ E \setminus a & \text{dla } |A| \geq 2 \text{ oraz } a \notin A, \\ E & \text{dla } |A| \geq 3 \text{ oraz } a \in A. \end{cases}$$

#### Twierdzenie 10.1.2

Rodzina  $\mathcal{I}$  jest rodziną zbiorów niezależnych wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki:

- (i<sub>1</sub>) jeśli  $I_1 \subseteq I_2 \in \mathcal{I}$ , to  $I_1 \in \mathcal{I}$ ,
- (i<sub>2</sub>) jeśli  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ ,  $|I_1| < |I_2|$ , to istnieje  $e \in I_2$ ,  $e \notin I_1$  taki, że  $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$ .

#### Twierdzenie 10.1.3

Rodzina  $\mathcal{C}$  jest rodziną cykli wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki:

- (c<sub>1</sub>) jeżeli  $C_1 \subset C_2 \in \mathcal{C}$ , to  $C_1 \notin \mathcal{C}$ ,
- (c<sub>2</sub>) jeżeli  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ,  $C_1 \neq C_2$ ,  $e \in C_1 \cap C_2$ , to istnieje  $C \in \mathcal{C}$  taki, że  $C \subseteq C_1 \cup C_2 \setminus e$ .

**Twierdzenie 10.1.4**

Funkcja  $\rho : 2^E \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki:

- ( $r_1$ )  $0 \leq \rho(A) \leq |A|$ ,
- ( $r_2$ ) jeżeli  $A \subseteq B \subseteq E$ , to  $\rho(A) \leq \rho(B)$ ,
- ( $r_3$ )  $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ .

Funkcja  
submodularna

Funkcja  $\rho$  spełniająca warunek ( $r_3$ ) nazywa się funkcją submodularną.

**Twierdzenie 10.1.5**

Funkcja  $\sigma : 2^E \rightarrow 2^E$  jest funkcją rozpięcia wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki:

- ( $s_1$ )  $A \subseteq \sigma(A)$ ,
- ( $s_2$ ) jeżeli  $A \subseteq B$ , to  $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$ ,
- ( $s_3$ )  $\sigma(\sigma(A)) = \sigma(A)$ ,
- ( $s_4$ ) jeżeli  $f \notin \sigma(A)$ ,  $f \in \sigma(A \cup e)$ , to  $e \in \sigma(A \cup f)$ .

Zbiory niezależne, cykle, rząd i rozpięcie można scharakteryzować również aksjomatycznie, przyjmując warunki konieczne i dostateczne z poniższych twierdzeń 10.1.2 – 10.1.5 jako postulaty.

Poniżej trzy najprostsze klasy matroidów.

1. Matroidy trywialne – jedynym zbiorem niezależnym jest  $\emptyset$ . Wtedy  $\rho(M) = 0$ . Inaczej mówiąc, każdy element tworzy pętlę.
2. Matroidy wolne – wszystkie podzbiory są niezależne. Taki matroid nie zawiera cykli.
3. Matroidy jednorodne ( $k$ -jednorodne) – bazami są wszystkie zbiory  $k$ -elementowe. Wtedy  $\rho(M) = k$ . Cyklami są wszystkie zbiory  $(k+1)$ -elementowe.

Matroidy re-  
prezentowalne

Ważną klasę matroidów stanowią matroidy reprezentowalne nad ciałem  $F$ . Są to matroidy izomorficzne z matroidami, których zbiorami niezależnymi w sensie warunków ( $i_1$ ) – ( $i_2$ ) są zbiory wektorów linio-wo niezależnych w podzbiorze wektorów  $E$  przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $F$ . Ciało  $F$  nie musi być skończone, a przestrzeń  $V$  nie musi być skończonej wymiarowa. Jednak zakładamy, że zbiór wektorów  $E$  jest skończony. Matroidy binarne to matroidy reprezentowalne nad ciałem  $GF(2)$ .

**Matroidy  
macierzowe**

Szczególnym przypadkiem matroidów reprezentowalnych nad ciałem  $F$ , gdy przestrzeń  $V$  jest skończenie wymiarowa, są matroidy macierzowe. Niech:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

gdzie elementy  $a_{ij}$  należą do dowolnego ciała  $F$ . Niech  $E$  będzie zbiorem kolumn macierzy  $A$ . Rodziną zbiorów niezależnych matroidu  $M(A) = (E, \mathcal{I})$  jest teraz rodzina zbiorów kolumn liniowo niezależnych.

**Przykład 10.1.5**

Określmy macierz  $A$  nad ciałem  $GF(2)$  w następujący sposób:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kolumny macierzy  $A$  są niezerowymi wektorami przestrzeni  $V(3, 2)$  (patrz rysunek 9.1 z rozdziału 9). Bazę matroidu  $M(A)$  tworzą na przykład trzy ostatnie kolumny macierzy  $A$ . Wyznaczenie wszystkich baz matroidu  $M(A)$  pozostawimy do rozwiązania w zadaniu 10.5.

**Przykład 10.1.6**

Określmy macierz  $A$  nad ciałem  $GF(3)$  (wg tabel na str. 170 – przykład 9.1.2) w następujący sposób:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kolumny macierzy  $A$  są niezerowymi wektorami przestrzeni  $V(3, 2)$ . Bazę matroidu  $M(A)$  tworzą na przykład trzy pierwsze kolumny macierzy  $A$  albo trzy ostatnie.

Kolejnym ważnym przykładem matroidów są matroidy powstałe z geometrii rzutowych i afinicznych. Niech  $A$  będzie podzbiorem punktów skończonej geometrii rzutowej  $PG(r-1, q)$  lub afinicznej  $AG(r, q)$ . Określmy  $\sigma(A)$  jako najmniejszą podprzestrzeń zawierającą  $A$ . Można sprawdzić, że tak określone  $\sigma$  spełnia warunki  $(s_1) - (s_4)$  z twierdzenia 10.1.5, a więc jest rozpięciem. Jeżeli tą podprzestrzenią jest  $PG(r'-1, q)$  lub  $AG(r', q)$ , to  $\rho(A) = r'$ . Oznacza to, że geometrię można traktować jako matroid, w którym podprzestrzenie (podgeometrie) są zbiorami domkniętymi. Matroidy te są reprezentowalne nad  $GF(q)$ .

**Przykład 10.1.7**

Matroid będący płaszczyzną Fano oznaczamy  $F_3$ . Bazami  $F_3$  są zbiory trzyelementowe niebędące prostymi. Cyklami są proste oraz zbiory czteroelementowe, z których żadne trzy elementy nie tworzą prostej, czyli dopełnienia prostych (patrz rysunek 9.3).

*Matroidy  
grafowe*

Inną ważną klasę matroidów stanowią matroidy *grafowe*. W matroidzie grafowym zbiór  $E$  jest zbiorem krawędzi grafu nieskierowanego  $G = (V, E)$ , a rodziną  $\mathcal{B}$  baz jest rodzina lasów spinających (dla grafów spójnych – rodzina drzew spinających). Dość łatwo jest sprawdzić, że istotnie, lasy spinające grafu spełniają warunki  $(b_1)$  i  $(b_2)$ . Ponadto cykle proste grafu spełniają warunki  $(c_1)$  i  $(c_2)$ , są więc również cyklami takiego matroidu.

Łatwo udowodnić następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 10.1.6**

*Każdy matroid grafowy jest binarny.*

**Przykład 10.1.8**

Graf  $C_3$  sam jest cyklem, więc trzelementowy matroid mający jeden cykl ma macierz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nie jest jednak na odwrót, to znaczy istnieją matroidy binarne, które nie są grafowe.

**Przykład 10.1.9**

Matroid  $F_3$  jest binarny, ale nie jest grafowy. Zgodnie z twierdzeniem 6.1.1 różnica symetryczna dwóch cykli w grafie jest sumą rozłącznych krawędziowo cykli. Cyklami w  $F_3$  (patrz rysunek 9.3 na str. 176) są na przykład  $\{1, 3, 4, 7\}$  i  $\{2, 5, 6, 7\}$ . Ich różnicą symetryczną jest zbiór  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , który nie jest sumą dwóch rozłącznych cykli.

*Ograniczenie*

Niech  $M = (E, \mathcal{C})$  będzie matroidem cykli oraz niech  $A \subseteq E$ . Ograniczeniem matroidu  $M$  do zbioru  $E \setminus A$  nazywa się matroid  $M \setminus A$ , którego cyklami są tylko cykle zawarte w  $E \setminus A$ , czyli  $M \setminus A = (E \setminus A, \mathcal{C}')$ , gdzie:

$$\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C} : C \subseteq A\}. \quad (10.1.1)$$

*Ściągnięcie*

Ściągnięciem matroidu  $M$  do zbioru  $E \setminus A$  nazywa się matroid  $M/A$ , którego cyklami są zbiory minimalne zbioru:

$$C'' = \{C : C = C' \cap (E \setminus A), C' \in \mathcal{C}\}. \quad (10.1.2)$$

*Suma prosta* Sumą prostą matroidów  $M_1 = (E_1, \mathcal{C}_1)$  oraz  $M_2 = (E_2, \mathcal{C}_2)$  jest matroid:

$$M_1 \oplus M_2 = (E_1 \cup E_2, \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2).$$

Rodziną baz matroidu  $M_1 \oplus M_2$  jest rodzina:

$$\mathcal{B} = \{B : B = B_1 \cup B_2, B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\},$$

gdzie  $\mathcal{B}_i$  jest rodziną baz matroidu  $M_i$ .

*Minor* Matroid  $M'$  otrzymany z matroidu  $M$  poprzez kolejne operacje ograniczenia lub ściągnięcia nazywa się *minorem* matroidu  $M$ .

### Przykład 10.1.10

Niech  $F_3$  będzie matroidem Fano (patrz str. 186 i rysunek 9.3). Cyklami w  $F_3$  są proste i ich dopełnienia. Niech  $A = \{6, 7\}$ . Wtedy cyklami w  $F_3 \setminus A$  zgodnie ze wzorem (10.1.1) są  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 4, 5\}$  i  $\{2, 3, 4, 5\}$ . Zgodnie ze wzorem (10.1.2) mamy:

$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}''$
$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\{1, 4, 5\}$	$\{1, 4, 5\}$
$\{1, 6, 7\}$	$\{1\}$
$\{2, 4, 7\}$	$\{2, 4\}$
$\{2, 5, 6\}$	$\{2, 5\}$
$\{3, 4, 6\}$	$\{3, 4\}$
$\{3, 5, 7\}$	$\{3, 5\}$
$\{4, 5, 6, 7\}$	$\{4, 5\}$
$\{2, 3, 6, 7\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3, 4, 5\}$	$\{2, 3, 4, 5\}$
$\{1, 3, 5, 6\}$	$\{1, 3, 5\}$
$\{1, 3, 4, 7\}$	$\{1, 3, 4\}$
$\{1, 2, 5, 7\}$	$\{1, 2, 5\}$
$\{1, 2, 4, 6\}$	$\{1, 2, 4\}$

a więc cyklami w  $F_3/A$  są:

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\},$$

natomiast cyklami w  $F_3 \setminus A$  są:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}.$$

Za pomocą minora można w prosty sposób sformułować twierdzenie o binarności matroidów.

### Twierdzenie 10.1.7

Matroid  $M$  jest binarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera minora  $U_{2,4}$ .

**Przykład 10.1.11**

Przykładem matroidu niebinarnego jest płaszczyzna rzutowa  $PG(2, 3)$  (patrz przykład 9.4 na str. 177). Cykle: trójki współliniowe, czwórki, z których żadne trzy nie są współliniowe.

*Matroid  
bicykliczny*

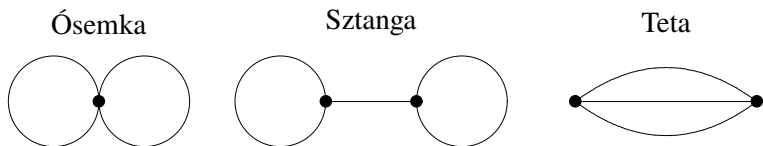
Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem nieskierowanym. Określmy rodzinę  $\mathcal{I}$  jako rodzinę zbiorów krawędzi tworzących podgrafy, w których każda spójna składowa ma co najwyżej jeden cykl. Nazwiemy je pseudolasami. Matroid *bicykliczny* (ang. *bicircular matroid*)  $M = (E, \mathcal{I})$  to matroid, w którym zbiory niezależne to pseudolasy. J. Simões Pereira<sup>65</sup> udowodnił w roku 1972 następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 10.1.8**

*Cykłami w matroidzie bicyklicznym są tylko:*

- dwa rozłączne krawędziowo cykle proste o jednym wspólnym wierzchołku (typ ósemka),
- dwa rozłączne wierzchołkowo cykle proste połączone drogą prostą (typ sztanga),
- trzy rozłączne drogi proste mające tylko dwa końcowe wierzchołki wspólne (typ teta).

Grafy tych typów można ściągnąć do grafów przedstawionych na rysunku 10.1.



Rysunek 10.1. Typy cykli w matroidzie bicyklicznym

Niech  $G$  będzie grafem przedstawionym na rysunku 10.2. Matroid bicykliczny dla tego grafu ma trzy cykle typu ósemka:

$$\{a, b, c, d, e, h\}, \{a, b, c, e, f, i\}, \{a, b, c, d, f, h, i\},$$

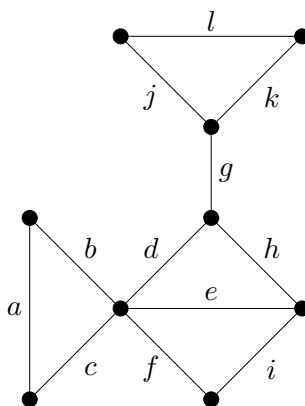
jeden cykl typu teta:  $\{d, e, f, h, i\}$ , i jeden cykl typu sztanga:  $\{d, e, g, h, j, k, l\}$ .

**Przykład 10.1.12**

Niech  $G$  będzie grafem przedstawionym na rysunku 10.2. Matroid bicykliczny dla tego grafu ma trzy cykle typu ósemka:

$$\{a, b, c, d, e, h\}, \{a, b, c, e, f, i\}, \{a, b, c, d, f, h, i\},$$

jeden cykl typu teta:  $\{d, e, f, h, i\}$ , i jeden cykl typu sztangy:  $\{d, e, g, h, j, k, l\}$ .



Rysunek 10.2. Graf do przykładu 10.1.12

## 10.2. Transwersale

H. Perfect i L. Mirsky<sup>47</sup> napisali pionierskie prace dotyczące teorii transwersal.

Jeśli  $E$  jest niepustym zbiorem skończonym i  $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$  jest rodziną niepustych podzbiorów  $E$  (niekoniecznie różnych), to transwersalą rodziny  $\mathcal{F}$  nazywamy zbiór  $m$  różnych elementów zbioru  $E$ , wybranych po jednym z każdego zbioru  $S_i$ .

### Przykład 10.2.1

Dany jest zbiór  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  oraz jego podzbiory  $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$ ,  $S_3 = S_4 = \{2, 3\}$ ,  $S_5 = \{1, 4, 5, 6\}$ . Nie jest możliwe znalezienie pięciu różnych elementów zbioru  $E$ , po jednym z każdego zbioru  $S_i$ , gdyż wybierając  $1 \in S_1$ ,  $2 \in S_2$  i  $3 \in S_3$ , zabraknie nam następnego, innego elementu z  $S_4$ . Oznacza to, że rodzina  $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_5)$  nie ma transwersali. Jednak po usunięciu  $S_4$  podrodzina  $\mathcal{F}' = (S_1, S_2, S_3, S_5)$  już ma transwersalę, na przykład  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

*Transwersala  
częściowa*

Transwersalę podrodziny  $\mathcal{F}$  nazywamy transwersalą częściową. Każdy podzbiór transwersali częściowej jest transwersalą częściową.

**Przykład 10.2.2**

W przykładzie 10.2.1 rodzina  $\mathcal{F}$  ma wiele częściowych transwersal, na przykład  $\{1, 2, 3, 6\}$  dla podrodziny  $\{S_1, S_2, S_3, S_5\}$ ,  $\{2, 3, 6\}$  dla podrodziny  $\{S_2, S_3, S_6\}$ ,  $\{1, 5\}$  dla podrodziny  $\{S_1, S_5\}$ ,  $\emptyset$  dla podrodziny  $\emptyset$ .

*Kojarzenie  
małżeństw*

Omówimy teraz związek transwersal z tak zwanym problemem kojarzenia małżeństw. Jeśli  $E$  jest zbiorem chłopców,  $S_i$  jest zbiorem tych chłopców, których zna dziewczyna  $d_i$  dla  $1 \leq i \leq m$ , to transwersalą jest zbiór  $m$  chłopców, z których każdy jest znajomym kolejnej dziewczyny.

Twierdzenie Halla (twierdzenie 7.4.3) można sformułować w wersji transwersalowej.

**Twierdzenie 10.2.1**

*Niech  $E$  będzie niepustym zbiorem skończonym i niech  $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$  będzie rodziną niepustych podzbiorów  $E$ . Wówczas rodzina  $\mathcal{F}$  ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy suma dowolnych  $k$  podzbiorów  $S_i$  ma co najmniej  $k$  elementów  $1 \leq k \leq m$ .*

**Wniosek 10.2.1.**

*Jeżeli  $E$  jest niepustym zbiorem skończonym i  $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$  rodziną niepustych podzbiorów zbioru  $E$ , to rodzina  $\mathcal{F}$  ma transwersalę częściową mającą  $t$  elementów wtedy i tylko wtedy, gdy suma dowolnych  $k$  podzbiorów  $S_i$  ma co najmniej  $k + t - m$  elementów.*

**Wniosek 10.2.2.**

*Jeżeli  $E$  jest niepustym zbiorem skończonym i  $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$  rodziną niepustych podzbiorów zbioru  $E$ , i jeśli  $X$  jest dowolnym podzbiorem  $E$ , to  $X$  zawiera transwersalę częściową rodziny  $\mathcal{F}$  mającą  $t$  elementów wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru  $A$  zbioru  $\{1, \dots, m\}$  spełniony jest warunek:*

$$\left| \left( \bigcup_{j \in A} S_j \right) \cap X \right| \geq |A| + t - m.$$

Inny sposób badania transwersal rodziny  $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$  niepustych podzbiorów zbioru  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  polega na badaniu macierzy incydencji tej rodziny, to znaczy macierzy  $A = [a_{ij}]$  wymiaru  $m \times n$ , w której  $a_{ij} = 1$ , gdy  $e_j \in S_i$ , i  $a_{ij} = 0$  w przeciwnym razie. Jeśli przez  $r(A)$  oznaczymy największą liczbę jedynek, z których

żadne dwie nie leżą w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie, to rodzina  $\mathcal{F}$  ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy  $r(A) = m$ . Ponadto  $r(A)$  jest równe liczbie elementów transwersali częściowej mającej największą możliwą liczbę elementów.

W 1931 roku D. König<sup>34</sup> i J. Egerváry<sup>15</sup> udowodnili następujące twierdzenie.

### Twierdzenie 10.2.2

*Rząd macierzy zero-jedynkowej  $A$  jest równy najmniejszej liczbie  $\mu$  wierszy i kolumn, które w sumie zawierają wszystkie jedynki macierzy  $A$ .*

### Przykład 10.2.3

Macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą incydencji rodziny  $\mathcal{F} = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$  podzbiorów zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , gdzie:

$$S_1 = S_2 = \{1, 2\}, S_3 = S_4 = \{2, 3\}, S_5 = \{1, 4, 5, 6\}.$$

Rząd macierzy i liczba  $\mu$  z twierdzenia 10.2.2 są równe 3, bo wszystkie jedynki są zawarte w trzech pierwszych kolumnach i ostatnich trzech wierszach. Ponadto wyznacznik podmacierzy składającej się z trzech pierwszych kolumn i wierszy pierwszego, trzeciego i piątego jest równy 1.

Niech  $E$  będzie niepustym zbiorem skończonym, a  $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$  i  $\mathcal{G} = (T_1, \dots, T_m)$  dwiema rodzinami niepustych podzbiorów zbioru  $E$ . Wspólną transwersalą rodzin  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{G}$  nazywamy zbiór  $m$  różnych elementów zbioru  $E$  będący transwersalą dla obu rodzin  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{G}$ .

Prostą, często spotykaną interpretacją jest następujące zagadnienie. W zadaniu układania planu zajęć zbiór  $E$  może być np. zbiorem terminów, w których mogą się odbywać wykłady, zbiory  $S_i$  mogą być zbiorami terminów, w których dany  $m$  profesorów może wygłosić wykład, a zbiory  $T_i$  zbiorami terminów, w których dostępnych jest  $m$  danych sal wykładowych. Znalezienie wspólnej transwersali rodzin  $\mathcal{F}$  oraz  $\mathcal{G}$  pozwala przypisać każdemu profesorowi dostępną salę wykładową w odpowiednim terminie.

**Twierdzenie 10.2.3**

Niech  $E$  będzie niepustym zbiorem skończonym oraz niech  $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$  i  $\mathcal{G} = (T_1, \dots, T_m)$  będą dwiema rodzinami niepustych podzbiorów zbioru  $E$ . Wówczas rodziny  $\mathcal{F}$  oraz  $\mathcal{G}$  mają wspólną transversalę wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych podzbiorów  $A$  oraz  $B$  zbioru  $\{1, 2, \dots, m\}$  zachodzi nierówność:

$$\left| \left( \bigcup_{i \in A} S_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in B} T_j \right) \right| \geq |A| + |B| - m.$$

Matroid  
transwersalny

**Twierdzenie 10.2.4**

Rodzina  $\mathcal{I}$  wszystkich transversali częściowych rodziny  $\mathcal{F}$  podzbiorów zbioru  $E$  jest rodziną zbiorów niezależnych matroidu  $M = (E, \mathcal{I})$ .

Dowód tego twierdzenia jest treścią zadania 10.9.

Matroid, w którym zbiorami niezależnymi są transversale częściowe, nazywa się *matroidem transwersalnym*.

Przyjmijmy teraz, że w zbiorze  $E$  jest dodatkowo wprowadzona struktura matroidu. Czy istnieje transversala rodziny  $\mathcal{G}$  będąca zbiorem niezależnym matroidu? Odpowiedź daje twierdzenie Rado<sup>59</sup>.

**Twierdzenie 10.2.5**

Niech  $M = (E, \mathcal{I})$  będzie matroidem i niech  $\mathcal{F}$  będzie rodziną niepustych podzbiorów zbioru  $E$ ,  $|\mathcal{F}| = m$ . Wówczas rodzina  $\mathcal{F}$  ma transversalę  $T \in \mathcal{I}$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $k$  takiego, że  $1 \leq k \leq m$ , suma dowolnych  $k$  podzbiorów  $S_i$  zawiera zbiór niezależny mający co najmniej  $k$  elementów.

**Uwaga.** Jeśli  $M$  jest matroidem wolnym, to twierdzenie 10.2.5 sprowadza się do twierdzenia 10.2.1.

## 10.3. Matroidy dualne

Matroid dualny  $M^*$  do matroidu  $M$  można określić na różne, choć równoważne sposoby. Jeżeli  $M = (E, \mathcal{B})$  jest matroidem, to dla rodziny  $\mathcal{B}^*$ , określonej wzorem:

$$\mathcal{B}^* = \{B^* : B^* = E \setminus B, B \in \mathcal{B}\}, \quad (10.3.1)$$

para  $M^* = (E, \mathcal{B}^*)$  jest matroidem dualnym do  $M$ .

**Przykład 10.3.1**

Matroidem dualnym do matroidu Fano  $F_3$  (przykład 10.1.7) jest matroid  $F_4$ . Jego bazami są zbiory czteroelementowe zawierające prostą z  $F_3$ , a cyklami dopełnienia prostych z  $F_3$ . Wynika stąd, że cykle w  $F_4$  są również cyklami w  $F_3$ .

Jeżeli  $M = (E, \rho)$  jest matroidem, to dla funkcji  $\rho^*$  określonej wzorem:

$$\rho^*(A) = |A| + \rho(E \setminus A) - \rho(E) \quad (10.3.2)$$

dla dowolnego  $A \subseteq E$  para  $M^* = (E, \rho^*)$  jest matroidem dualnym do  $M$ . Można udowodnić, że definicje dualności określone wzorami (10.3.1) i (10.3.2) są równoważne. Oczywiście jest równość  $M^{**} = M$ .

*Kobazy  
i kocykle*

Mając dane  $\mathcal{B}^*$  lub  $\rho^*$ , można również określić  $\mathcal{C}^*$  jako rodzinę cykli w matroidzie dualnym  $(E, \mathcal{B}^*)$  lub  $(E, \rho^*)$ . Zbiory z rodziny  $\mathcal{B}^*$  nazywa się kobazami, a zbiory z rodziny  $\mathcal{C}^*$  nazywa się kocyklami. Jednoelementowy kocykl nazywa się *kopętlą*. Zauważmy, że pętla nie należy do żadnej bazy, a kopętla należy do każdej bazy.

**Twierdzenie 10.3.1**

Jeżeli  $C \in \mathcal{C}$ ,  $B^* \in \mathcal{B}^*$ , to  $C \cap B^* \neq \emptyset$ . Jeżeli  $C^* \in \mathcal{C}^*$ ,  $B \in \mathcal{B}$ , to  $C^* \cap B \neq \emptyset$ .

**Twierdzenie 10.3.2**

Rodzina  $\mathcal{C}^*$  podzbiorów zbioru  $E$  jest rodziną kocykli wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory z  $\mathcal{C}^*$  są minimalnymi niepustymi podzbiarami  $C^* \subseteq E$  takimi, że:

$$|C \cap C^*| \neq 1$$

dla każdego  $C \in \mathcal{C}$ .

Dla matroidów grafowych mamy własność mocniejszą:  $|C \cap C^*|$  jest liczbą parzystą (patrz twierdzenie 7.3.4 na str. 131). Nie jest to jednak warunek wystarczający na to, aby matroid był grafowy.

**Przykład 10.3.2**

Łatwo sprawdzić, że dla  $F_3$  liczba  $|C \cap C^*|$  jest parzysta, choć  $F_3$  nie jest grafowy.

Dualność matroidów pozwala na łatwe określenie grafów planarnych. Poniższa definicja jest równoważna definicji planarności ze str. 109. Faktu tego nie będziemy tu udowadniać.

*Grafy dualne  
geometrycznie*

Graf  $G$  jest *planarny*, gdy matroid dualny do matroidu cykli grafu  $G$ , czyli  $(M(G))^*$ , jest grafowy. Inaczej mówiąc: graf  $G$  o zbiorze krawędzi  $E$  jest planarny, gdy jego cykle są kocyklami w pewnym innym grafie  $G^*$  o tym samym zbiorze krawędzi  $E$  albo (co na to samo wychodzi) gdy jego kocykle są cyklami w  $G^*$ . Graf  $G^*$  nazywamy grafem geometrycznie dualnym do grafu  $G$ . Trzeba jednak zwrócić uwagę, że wyznaczenie  $G^*$  nie musi być jednoznaczne.

Graf geometrycznie dualny do grafu płaskiego konstruuje się następująco. Umieszczamy graf planarny  $G$  na płaszczyźnie w dowolny sposób. Każdy obszar, na który graf płaski dzieli płaszczyznę, jest wierzchołkiem grafu dualnego  $G^*$ . Krawędź  $e$  łączy wierzchołki  $A$  oraz  $B$  w grafie  $G^*$  (obszary  $A$  oraz  $B$  w grafie  $G$ ), jeśli  $e$  jest granicą obszarów  $A$  oraz  $B$  w grafie  $G$ .

### Twierdzenie 10.3.3

*Niech  $G$  będzie spójnym grafem płaskim mającym  $n$  wierzchołków,  $m$  krawędzi i  $f$  ścian oraz niech graf  $G^*$  geometrycznie dualny do niego ma  $n^*$  wierzchołków,  $m^*$  krawędzi i  $f^*$  ścian. Wtedy  $n^* = f$ ,  $m^* = m$  oraz  $f^* = n$ .*

Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy ma graf dualny.

### Przykład 10.3.3

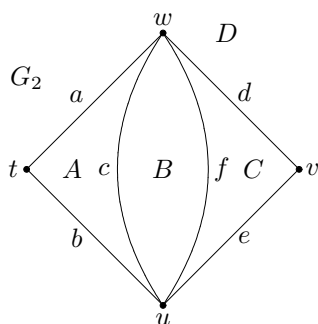
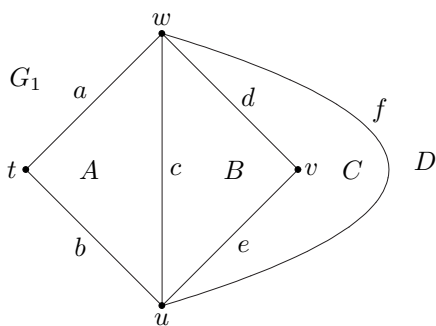
Niech  $G = (V, E)$ , gdzie  $V = \{t, u, v, w\}$  jest zbiorem wierzchołków, natomiast  $E = \{a, b, c, d, e, f\}$  jest zbiorem krawędzi. Oznaczmy przez  $M$  matroid cykli tego grafu. Graf planarny  $G$  umieszczamy na płaszczyźnie na dwa sposoby – jako  $G_1$  oraz  $G_2$ . Oczywiście grafy  $G_1$  oraz  $G_2$ , przedstawione na rysunku 10.3, są izomorficzne. Graf  $G$  dzieli płaszczyznę na cztery obszary  $A, B, C, D$ , które będą wierzchołkami w grafach dualnych  $G_1^*$  oraz  $G_2^*$ .

Grafami dualnymi do  $G$  powstałymi z  $G_1$  i  $G_2$  są nieizomorficzne grafy  $G_1^*$  oraz  $G_2^*$  przedstawione na rysunku 10.4, które mają jednak ten sam matroid cykli  $M^*$ .

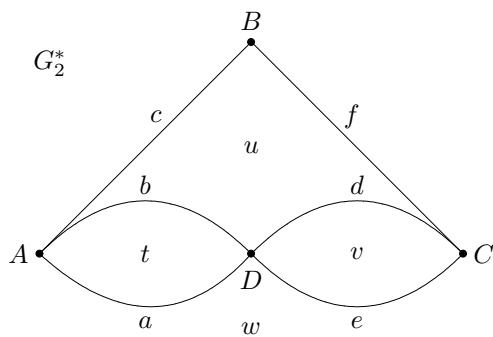
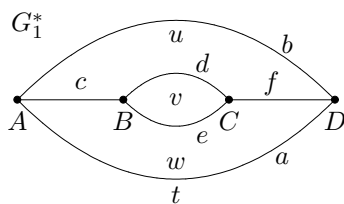
Jak widać z przykładu 10.3.3, konstrukcja grafu  $G^*$  może zależeć od sposobu położenia grafu  $G$  na płaszczyźnie.

### Twierdzenie 10.3.4

*Niech  $G$  będzie grafem planarnym i niech  $G^*$  będzie dowolnym grafem dualnym do grafu  $G$ . Wówczas zbiór krawędzi grafu  $G$  tworzy cykl wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu zbiór krawędzi grafu  $G^*$  jest cięciem minimalnym w  $G^*$ .*



Rysunek 10.3. Grafy do przykładu 10.3.3



Rysunek 10.4. Grafy dualne do przykładu 10.3.3

**Wniosek 10.3.1.**

*Dany zbiór krawędzi grafu planarnego  $G$  jest cięciem minimalnym w grafie  $G$  wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu zbiór krawędzi grafu  $G^*$  tworzy cykl w  $G^*$ .*

**10.4. Wielomiany Tutte'a**

Funkcję tworzącą rząd matroidu definiujemy wzorem:

$$R(M; u, v) = \sum_{A \subseteq E} u^{\rho(E) - \rho(A)} v^{|A| - \rho(A)}. \quad (10.4.1)$$

Wielomiany  
Tutte'a

Wielomian Tutte'a<sup>71</sup> określamy wzorem:

$$T(M; x, y) = R(M; x - 1, y - 1). \quad (10.4.2)$$

**Własność 10.4.1**

*Dla matroidu  $M$  prawdziwy jest wzór:*

$$T(M; x, y) = T(M^*; y, x). \quad (10.4.3)$$

*Dowód.* Ponieważ sumowanie we wzorze (10.4.1) jest po wszystkich podzbiorach  $A \subseteq E$ , to można podstawić  $A \leftarrow A' = E \setminus A$ , więc:

$$R(M^*; u, v) = \sum_{A \subseteq E} u^{r^*(E) - r^*(A')} v^{|A'| - r^*(A')}.$$

Ponieważ  $r^*(E) = |E| - \rho(E)$ , to:

$$r^*(E) - r^*(A') = |E| - \rho(E) - |E| + \rho(E) + |A| - \rho(A) = |A| - \rho(A)$$

oraz

$$|A| - \rho(A') = \underbrace{|E \setminus A| - |E|}_{-|A|} + \rho(E) + |A| - \rho(A) = \rho(E) - \rho(A).$$

Stąd i ze wzoru (10.4.2) otrzymujemy (10.4.3).  $\square$

Jeśli  $G$  jest grafem nieskierowanym, to wielomian Tutte'a definiujemy wzorem:

$$T(G, x, y) = T(M(G), x, y).$$

**Przykład 10.4.1**

*Wielomian Tutte'a dla  $C_3$*  Niech  $C_3$  będzie cyklem trzejelementowym, czyli również matroidem 2-jednorodnym na trzech elementach. Wtedy:

$$\begin{aligned}
 T(C_3; x, y) \\
 |A| = 0 : &= (x-1)^2 \\
 |A| = 1 : &+ 3(x-1) \\
 |A| = 2 : &+ 3 \\
 |A| = 3 : &+ y-1 \\
 &= (x-1)^2 + 3(x-1) + 3 + y-1 \\
 &= x^2 + x + y.
 \end{aligned}$$

Ogólnie:

$$T(C_n; x, y) = y + \sum_{i=1}^{n-1} x^i, \quad (10.4.4)$$

$$T(U_{n,k}; x, y) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} (x-1)^{k-i} + \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i} (y-1)^{i-k}. \quad (10.4.5)$$

Cykl  $C_n$  jest matroidem jednorodnym  $U_{n,n-1}$ , więc (10.4.4) wynika z (10.4.5).

**Przykład 10.4.2**

Dwa nieizomorficzne matroidy mogą mieć ten sam wielomian Tutte'a.

**Przykład 10.4.3**

Jeśli matroid  $M$  jest geometrią rzutową  $PG(r-1, q)$ , jak udowodniła E. Mphako<sup>51†</sup>:

$$\begin{aligned}
 T(M; x, y) \\
 = \frac{1}{(y-1)^r} \left( y^{[r]} + \sum_{j=0}^{r-1} y^{[j]} \binom{r}{j}_q \prod_{i=0}^{r-j-1} ((x-1)(y-1) - q^i) \right).
 \end{aligned}$$

Dla płaszczyzny Fano  $F_3$  mamy:

$$T(F_3; x, y) = 3x + 4x^2 + x^3 + 7xy + 3y + 6y^2 + 3y^3 + y^4, \quad (10.4.6)$$

natomiast dla matroidu  $F_4$  dualnego do  $F_3$  mamy:

$$T(F_4; x, y) = 3y + 4y^2 + y^3 + 7xy + 3x + 6x^2 + 3x^3 + x^4. \quad (10.4.7)$$

*Niezmiennik izomorfizmu*

*Niezmiennikiem* (izomorfizmu) nazywa się każdą funkcję  $f$  określoną na klasie matroidów  $\mathcal{M}$  taką, że dla izomorficznych  $M'$  oraz  $M''$  z klasy  $\mathcal{M}$  zachodzi równość:

$$f(M') = f(M''). \quad (10.4.8)$$

<sup>†</sup>E. G. Mphako, *Tutte Polynomials of Perfect Matroid Designs*, „Combinatorics, Probability and Computing”, 2000, 9, s. 363–367.

Poniższy wynik został udowodniony przez J. G. Oxleya i D. J. A. Welsha<sup>‡</sup>. Autorzy nazwali go „twierdzeniem – receptą”.

### Twierdzenie 10.4.1

Niech  $\mathcal{C}$  będzie klasą matroidów zamkniętych ze względu na sumy proste  $M_1 \oplus M_2$  oraz jednoelementowe ograniczenia  $M \setminus e$  i ściągnięcia  $M/e$  dla  $e \in E(M)$ . Niech  $f$  będzie funkcją o wartościach rzeczywistych będącą niezmiennikiem izomorfizmu określoną na  $\mathcal{C}$  i spełniającą równania:

$$f(M) = af(M \setminus e) + bf(M/e), \quad (10.4.9)$$

$$f(M_1 \oplus M_2) = f(M_1)f(M_2). \quad (10.4.10)$$

Wtedy  $f$  jest dana wzorem:

$$f(M) = a^{|E|-\rho(E)}b^{\rho(E)}T\left(M; \frac{x_0}{b}, \frac{y_0}{a}\right),$$

gdzie  $x_0 = f(I)$  oraz  $y_0 = f(L)$ . □

Każdy niezmiennik  $f$  spełniający (10.4.9) – (10.4.10) nazywa się niezmiennikiem Tutte’a-Gröthendiecka albo inaczej (TG)-niezmiennikiem.

Przedstawmy tu niektóre z niezmienników. Wielomian  $T$  zlicza:

1. w punkcie  $(1, 1)$  bazy  $M$  (drzewa spinające grafu spójnego),
2. w punkcie  $(2, 1)$  zbiory niezależne w  $M$  (las w grafie),
3. w punkcie  $(2, 0)$  acykliczne orientacje grafu  $G$ ,
4. w punkcie  $(2, 2)$  wszystkie podzbiory zbioru  $E$ .

Ważną rolę pełnią wartości wielomianów Tutte’a w niektórych punktach płaszczyzny, a szczególnie wzdłuż hiperboli:

$$H_\alpha = \{(x, y) : (x-1)(y-1) = \alpha\}.$$

Wielomian  
chromatyczny

Wielomian chromatyczny grafu (patrz str. 114) ma postać:

$$P(G; \lambda) = (-1)^{r(E)} \lambda^{k(G)} T(G; 1 - \lambda, 0),$$

gdzie  $k(G)$  jest liczbą składowych spójności grafu  $G$ .

---

<sup>‡</sup>J. G. Oxley, D. J. A. Welsh, *The Tutte Polynomial and Percolation* [w:] *Graph Theory and Related Topics*, New York 1979, s. 329–339.

**Przykład 10.4.4**

Ponieważ  $T(C_3; x, y) = x^2 + x + y$  (patrz przykład 10.4.1), to liczba baz wynosi  $T(C_3; 1, 1) = 1 + 1 + 1 = 3$ , a liczba zbiorów niezależnych wynosi  $T(C_3; 2, 1) = 4 + 2 + 1 = 7$ . Matroidem dualnym do  $C_3$  jest matroid  $C_3^*$ , którego bazami są zbiory jednoelementowe, a cyklami – zbiory dwuelementowe. Ze wzoru (10.4.3) wynika, że  $T(C_3^*; x, y) = y^2 + x + y$ , tak więc liczba baz wynosi  $T(C_3^*; 1, 1) = 3$ , a liczba zbiorów niezależnych wynosi  $T(C_3^*; 2, 1) = 1 + 1 + 2 = 4$ .

Omówimy dwa przykłady zastosowań wielomianów Tutte'a. Pierwszy dotyczy niezawodności, drugi jest poświęcony przepływowi w grafie.

Niech  $G$  będzie grafem spójnym. Każda krawędź jest *otwarta* z prawdopodobieństwem  $p$  i *zamknięta* z prawdopodobieństwem  $q = 1 - p$ . Niezawodność  $R(G; p)$  jest prawdopodobieństwem, że pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje droga złożona z krawędzi otwartych:

$$R(G; p) = \sum_A p^{|A|} (1 - p)^{|E \setminus A|}, \quad (10.4.11)$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich  $A \subseteq E$  zawierających drzewo spinające  $G$ . Z twierdzenia 10.4.1 otrzymujemy następujący wniosek.

**Wniosek 10.4.1.**

Jeżeli  $G$  jest spójny, to:

$$R(G; p) = q^{|E| - |V| + 1} p^{|V| - 1} T(G; 1, q^{-1}). \quad (10.4.12)$$

*Dowód.* Jeżeli  $e$  nie jest ani pętlą ani mostem, to:

$$R(G; p) = qR(G \setminus e; p) + pR(G/e; p).$$

Ponieważ  $R(L; p) = 1$  oraz  $R(I; p) = p$  dla dowolnego  $p$ , to z „twierdzenia – recepty” (twierdzenie 10.4.1) wynika (10.4.12).  $\square$

Niech  $G$  będzie dowolnym grafem o dowolnej orientacji krawędzi. Oznaczmy przez  $E^-(v)$  i  $E^+(v)$  zbiory krawędzi odpowiednio o końcu i początku w  $v$ . Niech  $H$  będzie dowolną skończoną grupą abelową z notacją addytywną. Wtedy  $\Phi : E(G) \rightarrow H \setminus \{0\}$  jest  $H$ -przepływem (niezerowym), gdy dla każdego wierzchołka  $v \in V$ :

$$\sum_{e \in E^-(v)} \Phi(e) = \sum_{e \in E^+(v)} \Phi(e).$$

Rzędem grupy skończonej jest liczba jej elementów (patrz str. 31).

**Lemat 10.4.1**

Liczba  $F(G; H)$   $H$ -przepływów w grafie  $G$  zależy wyłącznie od rzędu grupy  $H$ , a nie od jej struktury.

*Dowód.* Wystarczy pokazać, że  $F(G; H)$  jest  $(TG)$ -niezmiennikiem. Jeżeli  $e$  nie jest ani pętlą, ani mostem, to:

$$F(G; H) = F(G/e; H) - F(G \setminus e; H)$$

oraz  $F(I; H) = 0$ ,  $F(L; H) = |H| - 1$ . Stąd z twierdzenia 10.4.1:

$$F(G; H) = (-1)^{|E|-|V|+k(G)} T(G; 0, 1 - |H|), \quad (10.4.13)$$

co daje tezę lematu.  $\square$

Ponieważ  $F(G; H)$  nie zależy od  $H$ , a tylko od  $|H|$ , to można przyjąć oznaczenie  $F(G; H) = F(G; n)$ , gdzie  $n = |H|$ , i mówić o  $n$ -przepływie zamiast o  $H$ -przepływie. Wielomian  $F(G; \lambda)$  nazywa się wielomianem przepływowym. Jeśli  $G$  jest płaski, to równość (10.4.3) daje:

$$\lambda^{k(G)} F(G; \lambda) = P(G^*; \lambda), \quad (10.4.14)$$

gdzie  $P(G; \lambda)$  jest wielomianem chromatycznym grafu  $G$ , to znaczy jest liczbą różnych kolorowań grafu  $G$  za pomocą  $\lambda$  kolorów.

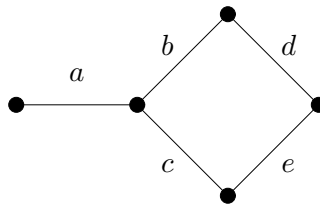
**Wniosek 10.4.2.**

Każdy graf płaski bez mostów ma 4-przepływ.  $\square$

W. Tutte postawił hipotezę, że każdy graf bez mostów ma 5-przepływ. Dzisiaj wiadomo tylko, że każdy graf bez mostów ma 6-przepływ.

**10.5. Zadania**

**10.1.** Dla grafu  $G$  przedstawionego na rysunku 10.5 wyznaczyć macierz reprezentacji matroidu cyklicznego nad  $GF(2)$ .



Rysunek 10.5. Graf do zadania 10.1

**10.2.** Wyznaczyć rodzinę zbiorów niezależnych i rodzinę cykli matroidu bicyklicznego grafu  $K_4$ .

**10.3.** Wyznaczyć reprezentację macierzową nad  $GF(2)$  matroidu cyklicznego  $M(K_4)$ .

**10.4.** Niech  $E$  będzie zbiorem niepustym,  $|E| = n$ , oraz niech  $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq n$ . Niech  $\mathcal{P} = \{A : |A| = k, 0 \leq m_1 \leq k \leq m_2\}$ . Sprawdzić, dla jakich  $m_1$  oraz  $m_2$  rodzina  $\mathcal{P}$  jest:

- (i) rodziną baz,
- (ii) rodziną cykli,
- (iii) rodziną zbiorów niezależnych

pewnego matroidu. Jeżeli jest rodziną baz, to wyznaczyć cykle i kocykle, a jeżeli jest rodziną cykli, to wyznaczyć bazy i kocykle.

**10.5.** Wyznaczyć bazy i cykle matroidu  $M(A)$  z przykładów 10.1.5 i 10.1.6.

**10.6.** Niech  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  i niech  $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ , gdzie  $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$ ,  $S_3 = S_4 = \{2, 3\}$ ,  $S_5 = \{1, 4, 5, 6\}$ . Wyznaczyć wszystkie transversale częściowe rodziny  $\mathcal{F}$ . Te transversale częściowe są zbiorami niezależnymi grafu  $G$ . Narysować ten graf. Wyznaczyć bazy i cykle matroidu  $M(G)$ .

**10.7.** Wykazać, że z dokładnością do izomorfizmu istnieją dokładnie cztery matroidy na zbiorze dwuelementowym i osiem na zbiorze trzyelementowym.

**10.8.** Niech  $E$  będzie zbiorem liter w słowie *MATROIDS*. Wykazać, że rodzina

$$(\text{STAR}, \text{ROAD}, \text{MOAT}, \text{RIOT}, \text{RIDS}, \text{DAMS}, \text{MIST})$$

podzbiorów zbioru  $E$  ma dokładnie osiem transversal.

**10.9.** Niech  $T_1$  oraz  $T_2$  będą transversalami rodziny  $\mathcal{F}$ . Niech  $x \in T_1$ . Wykazać, że istnieje  $y \in T_2$  taki, że  $T_1 \setminus x \cup y$  jest również transversalą rodziny  $\mathcal{F}$ .

**10.10.** Wykazać prawdziwość twierdzenia Rado w przypadku, gdy  $M$  jest matroidem Fano oraz  $\mathcal{F} = (\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 4, 5\})$ . Oznaczenia punktów są takie same jak na rysunku 9.3.

**10.11.** Dla grafów  $G_1^*$  oraz  $G_2^*$  przedstawionych na rysunku 10.4 narysować grafy do nich dualne  $G' = (G_1^*)^*$  oraz  $G'' = (G_2^*)^*$ . Czy  $G'$  oraz  $G''$  są izomorficzne? Czy izomorficzne są  $G'$  oraz  $G_1$ , a także odpowiednio  $G''$  oraz  $G_2$ ?

**10.12.** Niech  $M$  będzie matroidem na zbiorze  $E$  oraz  $A \subseteq B \subseteq E$ . Pokazać, że:

- a)  $(M \setminus A) \setminus B = M \setminus B$ ,
- b)  $(M/A) / B = M/B$ .

**10.13.** Pokazać, że:

$$(M/A)^* = (M^* \setminus A).$$

**10.14.** Korzystając z wielomianów Tutte'a dla matroidów  $F_3$  oraz  $F_4 = F_3^*$ , obliczyć liczbę baz w tych matroidach i liczbę zbiorów niezależnych w tych matroidach.

**10.15.** Wyznaczyć wielomian Tutte'a dla matroidu bicyklicznego  $K_4$ .

# 11. Systemy i algorytmy zachłanne

## 11.1. Systemy zachłanne

Około 1980 roku J. Korte<sup>35</sup> i L. Lovász<sup>42</sup> wprowadzili greedoidy, będące dalszym uogólnieniem matroidów, jako narzędzie do opisywania i badania algorytmów zachłannych\*.

Niech  $E$  będzie zbiorem skończonym. Systemem zachłannym (greedoidem) nazywamy parę  $M = (E, \mathcal{F})$  taką, że niepusta rodzina  $\mathcal{F}$  podzbiorów zbioru  $E$  spełnia następujące postulaty:

- ( $g_1$ )  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ,
- ( $g_2$ ) jeśli  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ,  $|F_1| < |F_2|$ , to istnieje  $e \in F_2 \setminus F_1$  taki, że  $F_1 \cup e \in \mathcal{F}$ .

Zbiory  
wykonalne  
i osiągalne

Zbiory należące do  $\mathcal{F}$  nazywa się *wykonalnymi* (ang. *feasible*). Rodzinę  $\mathcal{F}$  nazywa się *osiągalną* (ang. *accessible*), gdy spełniony jest warunek ( $g_1$ ) oraz

- ( $a_1$ ) jeśli  $F \in \mathcal{F} \setminus \emptyset$ , to istnieje  $e \in F$  takie, że  $F \setminus e \in \mathcal{F}$ .

Parę  $(E, \mathcal{F})$ , gdzie  $\mathcal{F}$  jest rodziną osiągalną, nazywamy systemem osiągalnym. Greedoidy są systemami osiągalnymi. Łatwo też zauważyć, że każdy matroid jest systemem zachłannym, gdzie zbiorami wykonalnymi są zbiory niezależne matroidu.

Baza

Bazą systemu zachłannego nazywa się każdy maksymalny zbiór wykonalny. Z postulatu ( $g_2$ ) wynika, że każda baza ma tę samą liczbę elementów.

Rząd

Rzędem  $\rho(F)$  zbioru  $F \subseteq E$  nazywa się liczbę elementów maksymalnego zbioru wykonalnego  $F \subseteq A$ . Zbiór  $F \in \mathcal{F}$  jest wykonalny

---

\*B. Korte, L. Lovász, R. Schrader, *Greedyoids*, Springer-Verlag, Berlin 1991. Patrz również B. Korte, J. Vygen, *Combinatorial Optimization, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin 2012.

wtedy i tylko wtedy, gdy  $\rho(F) = |F|$ . Każdy maksymalny wykonalny podzbiór  $F$  zbioru  $A$  ma tę samą liczbę elementów  $\rho(A)$ .

### Przykład 11.1.1

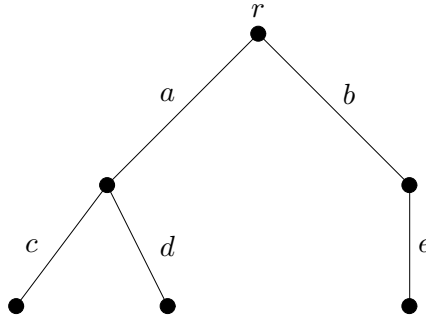
Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem nieskierowanym z wyróżnionym wierzchołkiem  $r \in V$ . Zbiory  $F$  krawędzi drzew (niekoniecznie spinających) zawierających wierzchołek  $r$  tworzą rodzinę  $\mathcal{F}$  taką, że  $(E, \mathcal{F})$  jest greedoidem.

### Przykład 11.1.2

Niech  $T = (V, E, r)$  będzie drzewem o ustalonym korzeniu  $r$ . Określmy rodzinę  $\mathcal{F}$  jako rodzinę zbiorów krawędzi poddrzew drzewa  $T$  o tym samym korzeniu  $r$ . Jeśli  $F \in \mathcal{F}$  oraz  $F \neq \emptyset$ , to usuwając krawędź  $e$  incydentną z wierzchołkiem stopnia 1, otrzymujemy znowu poddrzewo o korzeniu  $r$  lub zbiór pusty. Jedyną bazą takiego greedoidu jest  $E$  (patrz zadanie 11.1).

Niech  $T$  będzie drzewem przedstawionym na rysunku 11.1. Wówczas  $A \in \mathcal{F}$  tylko wtedy, gdy zajdzie jeden z przypadków:

- a)  $\{a, b\} \subseteq A$ ,
- b)  $a \in A, A \subseteq E \setminus \{b, e\}$ ,
- c)  $b \in A, A \subseteq E \setminus \{a, c, d\}$ ,
- d)  $a = \emptyset$ .



Rysunek 11.1. Drzewo  $T$  z korzeniem  $r$

Wtedy też:

$$\rho(A) = \begin{cases} |A|, & \text{jeśli } A \in \mathcal{F}, \\ 0, & \text{jeśli } A \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

W matroidzie każdy podzbiór bazy jest zbiorem niezależnym. Jeśli więc jedyną bazą jest cały zbiór  $E$ , to każdy zbiór  $A \subseteq E$  jest niezależny, czyli jest to matroid wolny. Tutaj nie każdy podzbiór  $E$  należy do  $\mathcal{F}$ . Oznacza to (patrz zadanie 11.1), że tak skonstruowana para  $(E, \mathcal{F})$  jest greedoidem, ale nie jest matroidem.

Wróćmy do warunków  $(s_1) - (s_3)$  z twierdzenia 10.1.5 na str. 184 i zastąpmy warunek  $(s_4)$  warunkiem  $(s'_4)$ :

- $(s_1)$   $A \subseteq \sigma(A)$ ,
- $(s_2)$  jeśli  $A \subseteq B$ , to  $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$ ,
- $(s_3)$   $\sigma(\sigma(A)) = \sigma(A)$ ,
- $(s'_4)$  jeśli  $f \notin \sigma(A)$ ,  $f \in \sigma(A \cup e)$ ,  $f \neq e$  to  $e \notin \sigma(A \cup f)$ .

*Antymatroid* Parę  $(E, \sigma)$  spełniającą warunki  $(s_1) - (s'_4)$  nazywamy antymatroidem. Antymatroid jest greedoidem, choć nie jest matroidem.

### Przykład 11.1.3

Niech  $\sigma(A)$  będzie minimalnym poddrzewem drzewa z przykładu 11.1.2, zawierającym krawędzie zbioru  $A$ . Wtedy  $\sigma(A)$  spełnia warunki  $(s_1) - (s'_4)$ , czyli greedoid z tego przykładu jest antymatroidem.

Wprowadźmy trzy własności greedoidów o rodzinie wykonalnej  $\mathcal{F}$ .

- $(v_0)$  Własność przedziałowa: jeśli  $F, G, H \in \mathcal{F}$ ,  $F \subseteq G \subseteq H$  oraz dla każdego  $e \notin H$  zachodzi  $F \cup e \in \mathcal{F}$ ,  $H \cup e \in \mathcal{F}$ , to wtedy  $G \cup e \in \mathcal{F}$ .
- $(v_G)$  Własność przedziałowa bez ograniczenia górnego: jeśli  $F, G \in \mathcal{F}$ ,  $F \subseteq G$  oraz dla każdego  $e \notin G$  zachodzi  $F \cup e \in \mathcal{F}$ , to wtedy  $G \cup e \in \mathcal{F}$ .
- $(v_D)$  Własność przedziałowa bez ograniczenia dolnego: jeśli  $G, H \in \mathcal{F}$ ,  $G \subseteq H$  oraz dla każdego  $e \notin H$  zachodzi  $G \cup e \in \mathcal{F}$ , to wtedy  $H \cup e \in \mathcal{F}$ .

Uzasadnieniem wprowadzenia tych pojęć są następujące trzy własności.

### Własność 11.1.1

*Greedoid mający własność przedziałową jest greedoidem, dla którego suma dwóch dowolnych zbiorów wykonalnych jest wykonalna, o ile zawiera inny zbiór wykonalny.*

### Własność 11.1.2

*Greedoid mający własność przedziałową bez ograniczenia górnego jest antymatroidem.*

### Własność 11.1.3

*Greedoid mający własność przedziałową bez ograniczenia dolnego jest matroidem.*

**Przykład 11.1.4**

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem prostym z wyróżnionym wierzchołkiem  $r \in V$ . Niech  $\mathcal{F}$  będzie rodziną zbiorów wierzchołków  $F$  takich, że  $r \in F$  oraz  $F$  tworzy spójny podgraf grafu  $G$ . Wtedy  $(V, \mathcal{F})$  jest antymatroidem. Ten greedoid jest zwany greedoidem przeszukiwań wierzchołków (ang. *vertex search greedoid*).

Zauważmy, że greedoid z przykładu 11.1.3 można uważać za szczególny przypadek tak określonego greedoidu. Wystarczy do drzewa  $T$  z przykładu 11.1.3 dołączyć wierzchołek  $r_0$  i dodać krawędź  $\{r_0, r\}$ , otrzymując drzewo  $T_0$ , a następnie utworzyć graf krawędziowy  $G = L(T_0)$  z wierzchołkiem  $r = L(\{r_0, r\})$ .

**Przykład 11.1.5**

Niech  $G = (V, E)$  będzie digrafem prostym z wyróżnionym wierzchołkiem  $r \in V$ . Niech  $\mathcal{F}$  będzie rodziną łuków poddrzew skierowanych zawierających łuki skierowane zgodnie z drogami prowadzącymi od  $r$  do wierzchołków końcowych.  $(E, \mathcal{F})$  jest greedoidem przedziałowym, ale nie jest ani matroidem, ani antymatroidem. Ten greedoid jest zwany greedoidem przeszukiwań łuków (ang. *line search greedoid*).

Zauważmy, że również tutaj greedoid z przykładu 11.1.3 można uważać za szczególny przypadek tak określonego greedoidu. Wystarczy, że w drzewie  $T$  z przykładu 11.1.3 zorientujemy krawędzie tak, aby łuki były skierowane zgodnie z drogami prowadzącymi od  $r$  do wierzchołków końcowych.

Greedoid można też określić za pomocą poniżej zdefiniowanego języka zachłannego.

Niech  $E^*$  będzie zbiorem słów nad alfabetem  $E$ , to znaczy zbiorem ciągów o elementach (literach) z  $E$ . Konkatenacją  $\alpha\beta$  słów  $\alpha = x_1 \dots x_i$  oraz  $\beta = y_1 \dots y_j$  jest słowo  $x_1 \dots x_i y_1 \dots y_j$ . Nośnikiem  $\tilde{\alpha}$  słowa  $\alpha$  jest zbiór różnych liter słowa  $\alpha$ . Słowo jest *proste*, gdy każda litera występuje w słowie co najwyżej jeden raz.

Językiem nazywamy skończoną i niepustą rodzinę  $\mathcal{L} \subseteq E^*$ . Język jest prosty, gdy wszystkie jego słowa są proste. Nośnikiem  $\tilde{\mathcal{L}}$  języka  $\mathcal{L}$  jest:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \{\tilde{\alpha} : \alpha \in \mathcal{L}\}. \quad (11.1.1)$$

*Język  
zachłanny*

Językiem zachłannym nad skończonym zbiorem  $E$  jest para  $(E, \mathcal{L})$ , gdzie  $\mathcal{L}$  jest językiem prostym takim, że:

- ( $l_1$ ) jeśli  $\alpha = \beta\gamma$  i  $\alpha \in \mathcal{L}$ , to  $\beta \in \mathcal{L}$ ,
- ( $l_2$ ) jeśli  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$  oraz  $|\alpha| > |\beta|$ , to  $\alpha$  zawiera literę  $x$  taką, że  $\beta x \in \mathcal{L}$ .

Warunek  $(l_1)$  jest warunkiem (lewej) dziedziczności. Warunek  $(l_2)$  jest aksjomatem wymiany.

### Twierdzenie 11.1.1

*Systemy zachłanne i języki zachłanne są równoważne w następującym sensie.*

- (i) *Jeśli  $(E, \mathcal{L})$  jest językiem zachłannym, to  $(E, \tilde{\mathcal{L}})$  jest systemem zachłannym.*
- (ii) *Jeśli  $(E, \mathcal{F})$  jest systemem zachłannym, to*  

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \{x_1 \dots x_k \in E^* : \{x_1, \dots, x_i\} \in \mathcal{F} \text{ dla } 1 \leq i \leq k\}$$
*jest językiem zachłannym.*
- (iii)  $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$  oraz  $\tilde{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ .

### Przykład 11.1.6

Niech zbiorem liter będą krawędzie drzewa z przykładu 11.1.2. Określmy słowa języka  $\mathcal{L}$  jako ciągi symboli  $\alpha = (x_1, \dots, x_k)$  takie, że zbiór  $\{x_1, \dots, x_k\}$  jest drzewem o korzeniu  $r$  oraz jeśli  $\alpha = \beta\gamma$ ,  $\gamma = (y_1, \dots, y_l)$ , to również  $\{y_1, \dots, y_l\}$  jest drzewem o korzeniu  $r$ . Spełnione są więc warunki  $(l_1)$  oraz  $(l_2)$ .

## 11.2. Algorytmy zachłanne

Niech  $E$  będzie zbiorem skończonym oraz  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Wartość funkcji  $w(e)$  nazywa się wagą elementu  $e$ . Niech  $\mathcal{S}$  będzie pewną rodziną podzbiorów zbioru  $E$ . Liczbę:

$$w(A) = \sum_{e \in A} w(e)$$

*Algorytm  
zachłanny*

nazywa się wagą zbioru  $A$ . Rozważmy problem znalezienia zbioru  $A \in \mathcal{S}$  o największej wadze. W tym celu sformułujemy następujący algorytm, zwany zachłannym.

### Algorytm 11.2.1

1. *Sortujemy elementy  $e \in E$  według nierosnących wag w ciąg  $e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_n$  (lub według niemalejących wag  $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$ ).*
2. *Zaczynając od  $A = \emptyset$ , dla  $i = 1, \dots, n$ , jeżeli  $A \cup e_i \in \mathcal{S}$ , to  $A \leftarrow A \cup e_i$ .*

Otrzymany w ten sposób zbiór  $A$  jest wynikiem działania algorytmu zachłannego.

Algorytm zachłanny nie musi być optymalny, to znaczy zbiór  $A \in \mathcal{S}$  znaleziony za pomocą algorytmu zachłannego nie musi mieć największej (najmniejszej) wagi.

### Przykład 11.2.1

Niech:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suma trzech elementów macierzy  $A$  wybranych algorytmem 11.2.1 takich, że z każdej kolumny może być tylko jeden element, jest największa i jest równa 15. Jeśli natomiast wybrane elementy nie mogą być z tych samych kolumn i wierszy, to suma takich trzech elementów nie jest największa. Algorytm zachłanny daje sumę 12, natomiast największa suma jest równa 13.

Bardziej ogólne przykłady pozostawimy jako zadania 11.2 i 11.3.

R. Rado<sup>59</sup> i J. Edmonds<sup>14</sup> udowodnili poniższy wynik.

### Twierdzenie 11.2.1

*Jeżeli  $M = (E, \mathcal{I})$  jest matroidem, to zbiór  $A$  wyznaczony przez algorytm zachłanny jest zbiorem niezależnym o największej (najmniejszej) wadze. Jeżeli  $(E, \mathcal{I})$  nie jest matroidem, to istnieje waga  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  taka, że  $A$  nie jest zbiorem o największej (najmniejszej) wadze.*

Za pomocą algorytmu zachłannego i z wykorzystaniem twierdzenia 11.2.1 można wyznaczyć minimalne drzewo spinające grafu spójnego.

Jeżeli matroid jest grafowy, to algorytm Kruskala wyboru maksymalnego (minimalnego) drzewa spinającego w grafie  $G$  jest algorytmem zachłannym w matroidzie  $M(G)$ . Algorytm Prima nie jest zaś algorytmem zachłannym w matroidzie  $M(G)$ , gdyż w sformułowaniu tego algorytmu występują wierzchołki grafu. Jest on jednak algorytmem zachłannym w pewnym greedoidzie związanym z grafem  $G$ . Zagadnienie to omówimy w dalszej części tego punktu.

### Przykład 11.2.2

W matroidzie Fano  $F_3$  o elementach  $\{1, 2, \dots, 7\}$  (zobacz rysunek 9.3 na str. 176) określimy wagę elementu  $i$  wzorem  $w(i) = (i^2 \bmod 6) + 1$ . Ponieważ różne elementy mogą mieć tę samą wagę, to elementy matroidu mogą być uporządkowane rosnąco na różne sposoby, na przykład:

1. (6, 5, 7, 1, 3, 2, 4),
2. (6, 5, 1, 7, 3, 2, 4),
3. (6, 7, 1, 5, 3, 4, 2).

Wybieramy bazę o najmniejszej wadze. Przy pierwszym i drugim uporządkowaniu minimalną bazę tworzą trzy pierwsze elementy, czyli  $B_1 = \{5, 6, 7\}$  oraz  $B_2 = \{1, 5, 6\}$ . Przy uporządkowaniu trzecim element 1 będący na trzeciej pozycji należy do  $\sigma(6, 7)$ , więc musi być pominięty i wzięty element 5. Stąd  $B_3 = B_1$ .

### Algorytm Huffmana

Algorytm Huffmana<sup>31</sup> jest metodą bezstratnej kompresji danych, opracowaną w 1952 roku. Mimo że nie jest zbyt efektywny, stosuje się go ze względu na prostotę oraz brak ograniczeń patentowych. Jest przykładem algorytmu zachłannego.

Z symboli utworzony jest ciąg skończony (tekst)  $\tau$ . Słowa kodowe o długości  $k$  bitów (znaków 0 i 1) każde wystarczają do zakodowania  $2^k$  symboli. Na przykład powszechnie stosowany ośmiobitowy kod ASCII wystarcza na zakodowanie 128 symboli. Nie jest jednak konieczne, aby słowa kodowe były jednakowej długości.

Załóżmy, że każdemu symbolowi przypisujemy  $s \in S$  i przyporządkowujemy wagę  $w(s)$ . Niech  $b(s)$  będzie liczbą bitów słowa kodującego symbol  $s$ . Kodowanie Huffmana polega na utworzeniu słów kodowych o niejednakowej długości w taki sposób, aby średnia ważona

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n b(s_i) w(s_i)}{\sum_{i=1}^n w(s_i)} \quad (11.2.1)$$

była najmniejsza. Jeśli za wagę  $w(s_i)$  przyjmiemy prawdopodobieństwo  $p_i$  występowania symbolu  $s_i$  w ciągu  $\tau$ , to  $L$  określone wzorem (11.2.2) jest wartością oczekiwaną długości słowa kodowego:

$$L = \sum_{i=1}^n b(s_i) p(s_i), \quad (11.2.2)$$

gdyż mianownik prawej strony wzoru (11.2.1) jest równy 1 (patrz dodatek A.5).

Algorytm Huffmana:

1. Tworzymy listę drzew binarnych, które w wierzchołkach przechowują pary:  $(s_i, p_i)$ . Na początku drzewa składają się wyłącznie z korzenia.

2. Jeśli na liście jest więcej niż jedno drzewo, powtarzamy: usuwamy z listy dwa drzewa o najmniejszym prawdopodobieństwie zapisanym w korzeniu. Wstawiamy nowe drzewo, w którego korzeniu jest suma prawdopodobieństw usuniętych drzew, natomiast one same stają się jego lewym i prawym poddrzewem. Korzeń drzewa nie przechowuje symbolu.
3. Drzewo, które pozostanie na liście, jest nazywane drzewem Huffmana – prawdopodobieństwo zapisane w korzeniu jest równe 1, natomiast w liściach drzewa zapisane są symbole.

Algorytm Huffmana nie określa, w jakiej kolejności wybierać drzewa z listy, jeśli mają takie samo prawdopodobieństwo. Nie jest również określone, które z usuwanych drzew ma stać się lewym bądź prawym poddrzewem. Jednak bez względu na przyjęte rozwiązanie wartość oczekiwana długości kodu pozostaje taka sama.

Na podstawie drzewa Huffmana tworzone są słowa kodowe według następującego algorytmu:

1. Każdej lewej krawędzi drzewa przypisujemy 0, prawej 1 (można oczywiście odwrotnie).
2. Przechodzimy w głąb drzewa od korzenia do każdego liścia (symbolu): jeśli idziemy w prawo, dopisujemy do kodu bit o wartości 1; jeśli idziemy w lewo, dopisujemy do kodu bit o wartości 0.

Długość słowa kodowego jest równa głębokości symbolu w drzewie.

### Przykład 11.2.3

Cztery symbole  $a, b, c, d$  występujące z prawdopodobieństwami:

$a$	$b$	$c$	$d$
0.1	0.2	0.3	0.4

Proces budowy drzewa kodowego przedstawiony jest na rysunku 11.2. Kody znaków:

- $a = 000$ ,
- $b = 001$ ,
- $c = 01$ ,
- $d = 1$ .

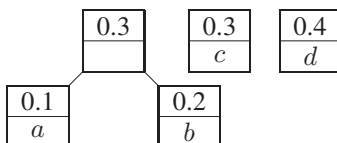
Wartość oczekiwana długości słowa kodowego wynosi:

$$3 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 = 1.9.$$

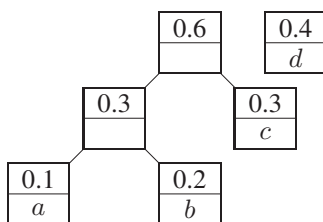
Cztery symbole – cztery drzewa składające się tylko z korzeni:



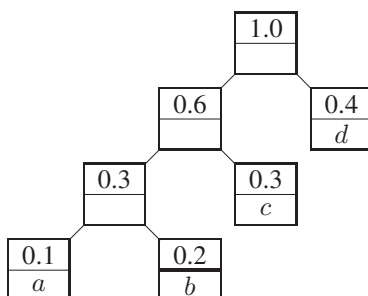
Łączymy korzenie z symbolami  $a$  oraz  $b$ :



Łączymy korzenie  $(a, b)$  oraz  $c$ :



Łączymy korzenie  $((a, b), c)$  oraz  $d$ :



Rysunek 11.2. Budowa drzewa kodowego w algorytmie Huffmana

Więcej o algorytmie Huffmana i algorytmach na nim opartych można znaleźć w książkach [6] i [8].

Pozostaje pytanie, kiedy algorytm zachłanny jest optymalny. Z twierdzenia 11.2.1 wiadomo, że dla dowolnych funkcji wagi jest tak dla matroidów. Rząd matroidu jest funkcją submodularną. Mocniejszą własnością jest modularność funkcji. Funkcja  $c(A)$ ,  $A \subseteq E$ , jest modularna, gdy spełnia równość:

$$c(A \cup B) = c(A) + c(B) - c(A \cap B).$$

*Mocna  
własność  
wymiany*

Mocną własność wymiany sformułujemy następująco. Dla każdego  $A \in \mathcal{F}$ , maksymalnego  $B \in \mathcal{F}$ ,  $A \subseteq B$ ,  $x \in E \setminus B$ ,  $A \cup x \in \mathcal{F}$  istnieje  $x \in B \setminus A$  taki, że  $A \cup y \in \mathcal{F}$  oraz  $(B \setminus y) \cup x \in \mathcal{F}$ .

### **Własność 11.2.1**

*Greedoid z przykładu 11.1.1 ma mocną własność wymiany.*

O optymalności algorytmu zachłannego mówi poniższe twierdzenie.

### **Twierdzenie 11.2.2**

*Niech  $(E, \mathcal{F})$  będzie greedoidem. Algorytm zachłanny znajduje zbiór  $F \subseteq \mathcal{F}$  o maksymalnej wadze dla dowolnej modularnej funkcji  $w : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$  wtedy i tylko wtedy, gdy greedoid ma mocną własność wymiany.*

Waga zbioru krawędzi grafu nieskierowanego określona jako suma wag jego krawędzi jest funkcją modularną. Z twierdzenia 11.2.2 i własności 11.2.1 wynika więc optymalność algorytmu Prima.

## **11.3. Zadania**

**11.1.** Pokazać, że para  $(E, \mathcal{F})$  skonstruowana w przykładzie 11.1.2 jest greedoidem.

**11.2.** Niech  $A$  będzie macierzą o  $n$  wierszach i  $m$  kolumnach o nieujemnych elementach. Uzasadnić, że suma  $m$  elementów macierzy wybranych za pomocą algorytmu 11.2.1 takich, że z  $i$ -tej kolumny,  $1 \leq i \leq m$ , może być tylko jeden element, jest największa.

**11.3.** Niech  $A$  będzie macierzą kwadratową  $n \times n$  o nieujemnych elementach. Wybrane elementy muszą się znajdować w różnych wierszach i różnych kolumnach. Uzasadnić, że algorytm zachłanny nie musi być optymalny.

**11.4.** Uzasadnić stwierdzenie z przykładu 11.1.3.

**11.5.** Zbudować drzewo kodowe Huffmana, gdy symbole  $a, b, c, d$  występują z prawdopodobieństwami:

$$\begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & d \\ \hline 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{array},$$

i obliczyć wartość oczekiwaną  $L$  słowa kodowego.

**11.6.** Zbudować drzewo kodowe Huffmana dla pięciu symboli i prawdopodobieństw:

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
0.1	0.1	0.2	0.2	0.4

**11.7.** Zbudować drzewo kodowe Huffmana, gdy wszystkie z pięciu symboli mają to samo prawdopodobieństwo.



# **Rozwiązania, odpowiedzi i wskazówki**



## Rozdział 1

### 1.1.

1. Warunek początkowy. Wzór jest prawdziwy dla  $n = 1$ :  

$$L = (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1 = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) (2 \cdot 1 + 1)}{3} = 1 = P.$$
2. Zakładamy, że wzór jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej  $n \geq 1$ , to znaczy, że założenie indukcyjne ma postać:

$$1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}.$$

Pokażemy, że jest prawdziwy dla liczby następnej  $n + 1$ , to znaczy pokażemy, że:

$$\begin{aligned} & 1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 + (2(n + 1) - 1)^2 \\ &= \frac{(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)}{3}. \end{aligned}$$

Mamy:

$$\begin{aligned} & 1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 \\ & \stackrel{\text{zał.ind.}}{=} \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3} + (2n + 1)^2 \\ &= \frac{n(2n - 1)(2n + 1) + 3(2n + 1)^2}{3} \\ &= \frac{(2n + 1)(2n^2 + 5n + 3)}{3} \\ &= \frac{(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)}{3}. \end{aligned}$$

Ponieważ z prawdziwości wzoru dla liczby naturalnej  $n$  wynika jego prawdziwość dla liczby następnej  $n + 1$ , więc na mocy zasady indukcji matematycznej wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ .

### 1.2.

1. Sprawdzamy, że wzór jest prawdziwy dla liczby  $n = 1$ :

$$(2 \cdot 1 - 1)^3 = 1 = 1^2 (2 \cdot 1^2 - 1).$$

2. Zakładamy, że wzór jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej  $n \geq 1$ , to znaczy, że założenie indukcyjne przyjmuje postać:

$$1^3 + 3^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2 (2n^2 - 1).$$

Pokażemy, że jest prawdziwy dla liczby następnej  $n + 1$ . Mamy:

$$\begin{aligned} & 1^3 + 3^3 + \cdots + (2n - 1)^3 + [2(n + 1) - 1]^3 \\ & \stackrel{\text{zał.ind.}}{=} n^2 (2n^2 - 1) + [2(n + 1)^2 - 1]^3 \\ & = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \\ & = (n + 1)^2 (2n^2 + 4n + 1) \\ & = (n + 1)^2 (2(n + 1)^2 - 1). \end{aligned}$$

Na podstawie zasady indukcji matematycznej wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ .

**1.3.** Warunek początkowy dla  $n = 4$  zachodzi, ponieważ  $4! = 24 > 16 = 2^4$ . Załóżmy teraz, że liczba  $n \geq 4$  ma własność  $P$ , czyli zachodzi  $P(n)$ . Pokażemy, że liczba  $n + 1$  też ma własność  $P$ . Mamy:

$$(n + 1)! = n!(n + 1) > 2^n(n + 1) > 2^n 2 = 2^{n+1},$$

co oznacza, że  $P(n + 1)$  zachodzi. Ponieważ sprawdziliśmy podstawę indukcji i krok indukcyjny, więc na mocy zasady indukcji matematycznej  $n! > 2^n$  dla każdego  $n \geq 4$ .

#### 1.4.

1. Sprawdzamy, że wzór jest prawdziwy dla  $n = 3$ :

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} < \frac{1}{2^{3-1}} = \frac{1}{4}.$$

2. Zakładamy, że wzór jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej  $n \geq 3$ , to znaczy, że założenie indukcyjne jest postaci:

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Wzór jest prawdziwy dla liczby następnej  $n + 1$ , czyli:

$$\frac{1}{(n + 1)!} < \frac{1}{2^n}.$$

Jest tak istotnie, gdyż:

$$\frac{1}{(n + 1)!} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n + 1} \stackrel{\text{zał.ind.}}{<} \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{n + 1} < \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

Na podstawie zasady indukcji matematycznej wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 3$ .

**1.5.**

1. Sprawdzamy, że wzór jest prawdziwy dla  $n = 2$ :

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} < \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. Zakładamy, że wzór jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej  $n \geq 2$ , to znaczy, że założenie indukcyjne ma postać:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

Pokażemy, że jest prawdziwy dla liczby następnej  $n+1$ , to znaczy pokażemy, że:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1}.$$

Jest tak, bo z założenia indukcyjnego:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} &< \frac{n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)^2 + n}{n(n+1)^2} = \frac{n^3 + n^2 - n - 1 + n}{n(n+1)^2} \\ &< \frac{n^3 + n^2}{n(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$ .

**1.6.** Udowodnimy równoważnie:

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = n(H_n - 1).$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} H_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{j} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n}{j} - \sum_{j=1}^{n-1} 1 \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{n}{j} - \sum_{j=1}^n 1 = n(H_n - 1). \end{aligned}$$

**1.7.** Dowód indukcyjny.

1.  $n = 2$ :

$$(1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 \leq q + a_1 + a_2.$$

2.

$$\begin{aligned}
& (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)(1 + a_{n+1}) \\
& > (1 + a_1 + \dots + a_n)(1 + a_{n+1}) \\
& = (1 + a_1 + \dots + a_n) + a_{n+1}(a_1 + \dots + a_n) + a_{n+1} \\
& > 1 + a_1 + \dots + a_{n+1}.
\end{aligned}$$

**1.8.** Dowód indukcyjny.1.  $n = 1$ :  $|a_1| \geq |a_1|$ .2. Dla  $a_{n+1} \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
& |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + |a_{n+1}| \\
& \stackrel{\text{zał.ind.}}{\geq} |a_1 + a_2 + \dots + a_n| + |a_{n+1}| \\
& = |a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}|.
\end{aligned}$$

Dla  $a_{n+1} \leq 0$ :

$$\begin{aligned}
& |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + |a_{n+1}| \\
& \stackrel{\text{zał.ind.}}{\geq} |a_1 + a_2 + \dots + a_n| + |a_{n+1}| \\
& \geq |a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{n+1}|.
\end{aligned}$$

**1.9.**1.  $n = 1$ :  $1 + x \geq 1 + x$ .

2.

$$\begin{aligned}
(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n (1 + x) \stackrel{\text{zał.ind.}}{\geq} (1 + (n + 1)x)(1 + x) \\
&= 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + x + nx = 1 + (n + 1)x.
\end{aligned}$$

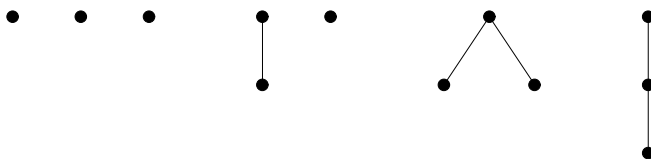
**1.10.**1.  $n = 1$ :  $11^2 + 12^1 = 133$ .

2.

$$\begin{aligned}
11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} \\
&= 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 122n - 1 \\
&= 11 \cdot 11^{n+1} + 122n - 1 - 122n - 1 + 144 \cdot 122n - 1 \\
&\stackrel{\text{zał.ind.}}{=} 133 \cdot 11k + 133 \cdot 122n - 1 = 133 \cdot (11k + 12^{2n-1}).
\end{aligned}$$

Ponieważ  $(11k + 12^{2n-1})$  jest liczbą całkowitą, więc teza indukcyjna została udowodniona.

**1.11.** Diagramy Hassego dla nieizomorficznych porządków są przedstawione na rysunku [R.1.3](#).



Rysunek R.1.3. Diagramy Hassego do zadania 1.11

**1.12.**

- Element minimalny: 1.
- Elementy maksymalne: te, które nie są dzielnikami innych elementów.
- Element najmniejszy: 1.
- Element największy: nie istnieje.

**1.13.** Wskazówka. Mamy pokazać, że liczba naturalna ma nieparzystą liczbę dzielników, gdy jest kwadratem liczby naturalnej.

Jeśli  $n$  jest kwadratem liczby  $a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}$ , to  $a_1^{2p_1} a_2^{2p_2} \dots a_n^{2p_n}$ . Dzielniki tej liczby są postaci  $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_n^{r_n}$ , gdzie  $r_i < 2p_i$ . Każdy wykładnik można wybrać na  $2p_i + 1$  sposobów. Stąd liczba wyborów, czyli dzielników liczby  $n$ , wynosi  $(2p_1 + 1)(2p_2 + 1) \dots (2p_n + 1)$ . Zatem jest liczbą nieparzystą.

**1.14.** Wskazówka. Skorzystać z faktu, że:

$$(f_n, f_{n+1}) = 1, \quad \text{NWD}(f_m f_n) = \text{NWD}(f_n, f_{m-n}) \text{ dla } m > n.$$

**1.15.** (Twierdzenie Zeckendorfa). Szkic rozwiązania. Istnieje dokładnie jedna liczba naturalna  $m$  taka, że  $f_m \leq n \leq f_{m+1}$ . Niech  $n = af_m + r$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq r < f_m$ . Przypuśćmy, że  $a \geq 2$ . Wtedy:

$$n = af_m + r \geq 2f_m + r \geq 2f_m \geq f_m + f_{m-1} = f_{m+1},$$

co jest sprzeczne z tym, że  $n < f_{m+1}$ . Zatem  $a = 1$ . Mamy więc  $n = f_m + r$ , gdzie  $0 \leq r < f_m$ .

Przypuśćmy, że  $r \geq f_{m-1}$ . Wtedy  $n = f_m + r \geq f_m + f_{m-1} = f_{m+1}$  wbrew temu, że  $n = f_m + r$ . Zatem  $n = f_m + r$ ,  $r < f_{m-1}$ .

Jeżeli  $r > 0$ , to z liczbą  $r$  postępujemy tak samo jak z liczbą  $n$ . Otrzymamy wtedy  $n = f_m + f_t + r'$ , gdzie  $m \geq t + 2$  oraz  $0 \leq r' < f_{t-1}$ . Powtarzając ten proces tak długo, aż pojawiająca się reszta będzie zerowa, otrzymamy żądany rozkład.

**1.16.** Dowód indukcyjny.

1.  $n = 3$ :  $l_3 = l_2 + l_1 = 3 = f_3 + f_1$ .
2.  $l_{n+1} = f_n + f_{n-2} + f_{n-1} + f_{n-3} = f_{n+1} + f_{n-1}$ .

**1.17.**

a) Z przykładu 1.3.10 i zadania 1.16:

$$f_{2n} = f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_n = f_n (f_{n+1} + f_{n-1}) = f_n l_{n+1}.$$

b) Z przykładu 1.3.11 i zadania 1.16:  $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$  oraz

$$\begin{aligned} l_{2n} &= f_n l_n + f_{n-1} l_{n-1} = f_n^2 + 2f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2, \\ l_n^2 &= (f_n + f_{n-2})^2 = f_n^2 + 2f_{n-1}^2 + 2(-1)^n + f_{n-1}^2. \end{aligned}$$

c) Z przykładu 1.3.12 i zadania 1.16:

$$\begin{aligned} l_1 + \dots + l_n &= 2 + 1 + f_3 + f_1 + \dots + f_n + f_{n-2} \\ &= (f_1 + \dots + f_{n-2}) + (f_3 + \dots + f_n) + 2 + 1 \\ &= f_{n+2} + f_n - 1 = l_{n+2} - 1. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} l_{n-1} + l_{n+1} &= 2f_{n-1} + f_{n-3} + f_{n-1} \\ &= 2f_{n-1} + f_n + f_{n-1} + f_{n-3} = \dots = 5f_{n-1}. \end{aligned}$$

**1.18.**  $s_5 = 32$ .

**1.19.**  $S(77) = 64$ .

**1.20.**  $T(45) = 243$ .

**1.21.**  $S(142) = 729$ .

**1.22.**

- a)  $a_n = 3^n - 2 \cdot n \cdot 3^n$ ;
- b)  $a_n = (-3)^n + 2 \cdot 2^n$ ;
- c)  $a_n = 2(-1)^n + 3n(-1)^n$ ;
- d)  $a_n = \frac{2}{3}(-3)^n - (-1)^n$ ;
- e)  $a_n = -\frac{19}{9} \cdot (-1)^n + \frac{1}{9} \cdot 8^n$ .

## Rozdział 2

**2.1.** Wszystkich funkcji ze zbioru  $\{a, b\}$  w zbiór  $\{A, B, C\}$  jest  $3^2 = 9$ :

$$f_1 = \{(a, A), (b, A)\},$$

$$f_2 = \{(a, A), (b, B)\},$$

$$f_3 = \{(a, A), (b, C)\},$$

$$f_4 = \{(a, B), (b, A)\},$$

$$f_5 = \{(a, B), (b, B)\},$$

$$f_6 = \{(a, B), (b, C)\},$$

$$f_7 = \{(a, C), (b, A)\},$$

$$f_8 = \{(a, C), (b, B)\},$$

$$f_9 = \{(a, C), (b, C)\}.$$

Wśród nich funkcjami różnowartościowymi są:

$$f_2, f_3, f_4, f_6, f_7, f_8.$$

Jest ich 6.

**2.2.**  $\binom{100}{3} = 161700.$

**2.3.**  $\binom{100}{3} = 161700.$

**2.4.**

a)  $10^4 = 10000,$

b)  $10^4 = 5040.$

**2.5.**

a)  $8!,$

b)  $8! \cdot 8!.$

**2.6.**  $n^{\overline{k}}.$

**2.7.**

Na dwie grupy.

$$\frac{\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \cdots + \binom{20}{20}}{2} = 2^{19}.$$

Druga, prostsza metoda: w ciągu 20 osób oznaczamy jedynką przynależność do pierwszej grupy, zerem – do drugiej. Mamy jednak dwie możliwe numeracje grup. Stąd liczba sposobów jest równa  $2^{20}/2$ .

Na trzy grupy drugą metodą: analogicznie jak dla dwóch grup, liczba sposobów jest równa  $3^{20}/3!$ .

**2.8.** Ustawienia dwóch osób  $A$  i  $B$  do dwóch kas:

Kasa 1	Kasa 2
$A$	$B$
$B$	$A$
$A$	
$B$	
$B$	
$A$	
	$A$
	$B$
	$B$
	$A$

Podobnie do trzech kas.

Ogólnie liczba możliwych ustawień  $n$  osób do  $m$  kas to liczba uporządkowanych rozmieszczeń  $n$  elementów w  $m$  pudełkach. Zgodnie z twierdzeniem 2.1.4 mamy 6 ustawień dwóch osób do dwóch kas, 12 ustawień do trzech kas.

20 osób do dwóch kas można ustawić na  $2^{20} = 2 \cdot 3 \dots 19 = 19!$  sposobów, a do trzech kas na  $3^{20} = 3 \cdot 4 \dots 20 = 20!/2$ .

**2.9.** Niech  $|A| = a$ ,  $|B| = b$ . Zbiór  $B$  można wybrać na  $\binom{n}{k}$  sposobów. Następnie jego podzbiór  $a$ -elementowy na  $\binom{b}{a}$  sposobów. Stąd liczba par wynosi  $\binom{n}{k} \binom{b}{a}$ .

**2.10.**  $10!$ .

**2.11.**  $3! \cdot 4! \cdot 5! = 17280$ .

**2.12.**  $3!4! \binom{5}{2}$ .

**2.13.** Z założeń wynika, że Arturk zawsze wkłada lewy but na prawą nogę (ma tu 5 możliwości), a prawy but na lewą nogę (znów 5 możliwości). Łącznie  $5 \cdot 5 = 25$ . W pięciu przypadkach będą to buty z tej samej pary, więc ostatecznie  $25 - 5 = 20$ .

**2.14.** Bar *Pięć Zupek* oferuje  $5 \cdot 10 = 50$  obiadów dwudaniowych, bar *Sześć Zupek*  $6 \cdot 8 = 48$ . Decydując się zjeść obiad w jednym z tych barów, mamy do wyboru  $5 \cdot 10 + 6 \cdot 8 = 50 + 48 = 98$  różnych obiadów dwudaniowych.

$$2.15. \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_m}.$$

2.16.

- a)  $n!$ ;
- b)  $(n-1)!$ ;
- c)  $\frac{(n-1)!}{2}$ .

2.17. Jeśli wieże są jednakowe, to w pierwszej kolumnie wieżę można ustawić w dowolnym miejscu (8 możliwości), w drugiej kolumnie w dowolnym miejscu poza rzędem, w którym stoi pierwsza wieża (7 możliwości) itd. Łącznie jest  $8! = 40320$  możliwości. Jeśli założymy, że wieże są rozróżnialne, to wynik ten należy pomnożyć przez  $8!$ , co daje 16257024 ustawień.

2.18. 4.

2.19.  $f = [1, 4, 9, 7] \circ [2, 8] \circ [3, 5] \circ [6]$  – jest typu  $1^1 2^2 4^1$ .

2.20. Inwersje:  $(3, 2)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(5, 2)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(6, 2)$ ,  $(6, 1)$ ,  $(7, 2)$ ,  $(7, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(9, 8)$ . Zatem  $I(f) = 12$ , czyli permutacja jest parzysta, ponieważ  $\text{sgn}(f) = (-1)^{12} = 1$ .

2.21.

$$(n!)^2 = (1 \cdot \dots \cdot n)(n \cdot \dots \cdot 1) = \prod_{i=1}^n i(n+1-i).$$

Potraktujmy  $i(n+1-i) = (n+1)^2/4 - (i - (n+1)/2)^2$  jako wielomian drugiego stopnia zmiennej  $i$ . Dla  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  przybiera on wartość najmniejszą w punkcie  $i = 1$ , a największą w punkcie  $i = (n+1)/2$ . Zatem dla  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  mamy  $n < i(n+1-i) \leq (n+1)^2/4$  i dalej:

$$n^n \leq (n!)^2 \leq \left(\frac{1}{4}(n+1)^2\right)^n,$$

$$n^{n/2} = n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Dla  $n > 1$  oczywista jest nierówność  $n! < n^2$ .

2.22. Lewa nierówność jest taka sama jak w zadaniu 2.21.

**2.23.**

$$\begin{aligned}
\frac{(kn)!}{(k!)^n} &= \frac{1}{(k!)^n} \left( k! \frac{(2k)!}{k!} \frac{(3k)!}{(2k)!} \cdots \frac{(kn)!}{((k-1)k)!} \right) \\
&= \frac{k!}{k!0!} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{(3k)!}{k!(2k)!} \cdots \frac{(kn)!}{k!((n-1)k)!} \\
&= \binom{k}{n} \binom{2k}{k} \cdots \binom{kn}{k}.
\end{aligned}$$

**2.24.**

Oszacowanie Stirlinga	$n!$	Błąd oszacowania
0.9	1	0.0779
1.9	2	0.0405
5.8	6	0.0273
23.5	24	0.0206
118.0	120	0.0165
710.0	720	0.0138
4980.3	5040	0.0119
39902.4	40320	0.0104
359536.9	362880	0.0092
3598695.6	3628800	0.0083

**2.25.**

Oszacowanie dolne	Oszacowanie górne	Błąd oszacowania
0.995870161462797	1.002274449182227	$6.4 \cdot 10^{-3}$
1.99732040475181	2.000652047690966	$1.7 \cdot 10^{-3}$
5.99609587878364	6.000599142468992	$7.5 \cdot 10^{-4}$
23.99082154340931	24.00102389134975	$4.2 \cdot 10^{-4}$
119.9698539592089	120.002637086197	$2.7 \cdot 10^{-4}$
719.8722122874293	720.0091873060039	$1.9 \cdot 10^{-4}$
5039.334743429015	5040.040582036087	$1.4 \cdot 10^{-4}$
40315.88809741375	40320.21778522547	$1.1 \cdot 10^{-4}$
362850.5533898798	362881.3778857532	$8.5 \cdot 10^{-5}$
3628560.141985113	3628810.051426935	$6.9 \cdot 10^{-5}$

**2.26.**  $\binom{n}{m} (n-1)!.$

**2.27.**  $\left\{ \begin{smallmatrix} 7 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 1624.$

## Rozdział 3

## 3.1.

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	-1	1				
3	0	2	-3	1			
4	0	-6	11	-6	1		
5	0	24	-50	35	-10	1	
6	0	-120	274	-225	85	-15	1

## 3.2.

Dowód rachunkowy.

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!}(n-k-1)! \\
 &= \frac{(n-1)!(n-k-1)!}{(k-1)!} \frac{n}{n-k} \\
 &= \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}.
 \end{aligned}$$

Rachunkowo inaczej.

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)^{\underline{k}}}{k!} + \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} \\
 &= \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}k}{k!} \\
 &= \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}n}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{n!} = \binom{n}{k}.
 \end{aligned}$$

Czysto kombinatorycznie.

Wyróżnijmy w zbiorze  $n$ -elementowym jeden element, na przykład element o numerze  $n$ . Podzbiory  $k$ -elementowe można podzielić na takie, które są zawarte w  $\{1, \dots, n-1\}$  – jest ich  $\binom{n-1}{k}$ , oraz takie, w których jednym z elementów jest element o numerze  $k$  – jest ich  $\binom{n-1}{k-1}$ . Zatem  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ .

**3.3.** Badamy iloraz:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{100}{37}}{\binom{101}{55}} &= \frac{100!}{37! \cdot 63!} \cdot \frac{101!}{55! \cdot 45!} \\ &= \frac{100!}{37!63!} \cdot \frac{45! \cdot 55!}{101!} = \frac{100! \cdot 37! \cdot 38 \cdot 39 \cdots 45 \cdot 55!}{37!63! \cdot 101!} = \frac{37! \cdot 55! \cdot 56 \cdots 63 \cdot 100! \cdot 101}{38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 1260545} \\ &= \frac{1260545}{56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot 60 \cdot 61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot 101} < 1. \end{aligned}$$

Stąd  $\binom{100}{37} < \binom{101}{55}$ .

**3.4.**  $\binom{8}{5} = 56$ .

**3.5.**

a)  $\binom{8+5-1}{5} = 792$ ,

b)  $\binom{8}{5} = 56$ .

**3.6.** Z definicji potęgi przyrastającej:

$$\frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{n(n+1) \cdots (n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k)!}{k!} n! = \binom{n+k-1}{k}.$$

**3.7.**  $\binom{100+97-1}{97} = \binom{196}{97}$ .

**3.8.**  $\frac{52!}{13! \cdot 13! \cdot 13! \cdot 13!}$ .

**3.9.**

$i = 1:$  490,

$i = 2:$  1176,

$i = 3:$  980,

$i = 4:$  280,

$i = 5:$  21.

**3.10.**

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} \binom{m}{k} &= \frac{n^{\overline{m}}}{m!} \frac{m^{\overline{k}}}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \\
&\quad \times \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\
&\quad \times \frac{(n-k)(n-k-1)\dots(n-m+1)}{(m-k)!} \\
&= \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}.
\end{aligned}$$

**3.11.** Z twierdzenia 3.1.2, przyjmując  $n = l = r = k$ , mamy:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{t=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{t} = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t}^2.$$

**3.12.**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{(r+k)-k} = \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{r} \\
&= \sum_{k=0}^{r+n} \binom{k}{r} = \binom{r+n+1}{r+1} = \binom{r+n+1}{n}.
\end{aligned}$$

**3.13.** Załóżmy indukcyjnie, że  $n^p \equiv n \pmod p$ . Wtedy:

$$(n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k = n + p + n^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k.$$

Ponieważ:

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!},$$

więc żaden z czynników  $k!$  nie jest równy  $p$  i stąd  $\binom{p}{k}$  jest wielokrotnością  $p$ . Zatem  $\binom{p}{k} \equiv 0$  i ostatecznie:

$$(n+1)^p = n^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} n^k \equiv n^p + 1.$$

Na mocy zasady indukcji  $n^p \equiv n \pmod p$ , czyli  $n^p - n$  jest podzielne przez  $p$ .

## Rozdział 4

**4.1.** Niech  $n = p_1^{k_1} \dots p_i^{k_i}$ , gdzie  $p_j$  są liczbami pierwszymi. Liczba dzielników wyraża się wzorem  $d(n) = (k_1 + 1) \dots (k_i + 1)$ . Rozkład na czynniki pierwsze:

216000	2
108000	2
54000	2
27000	2
13500	2
6750	2
3375	3
1125	3
375	5
25	5
5	5
1	

Stąd  $d(216000) = 112$ .

**4.2.** Obliczymy, ile jest liczb całkowitych w zbiorze  $X = \{1, 2, \dots, 2000\}$ , które są podzielne przez 9, 11, 13 lub 15.

Niech  $D_k = \{n \in X : n \text{ jest podzielne przez } k\}$ . Szukamy  $|D_9 \cup D_{11} \cup D_{13} \cup D_{15}|$ . Zauważmy, że  $|D_k|$  jest największą liczbą całkowitą  $\leq \lfloor \frac{2000}{k} \rfloor$ , a więc możemy dokonać następujących obliczeń:

$$|D_9| = 222, |D_{11}| = 181, |D_{13}| = 153, |D_{15}| = 133,$$

$$|D_9 \cap D_{11}| = |D_{99}| = 20, |D_9 \cap D_{13}| = |D_{117}| = 17,$$

$$|D_9 \cap D_{15}| = |D_{45}| = 44, |D_{11} \cap D_{13}| = |D_{143}| = 13,$$

$$|D_{11} \cap D_{15}| = |D_{165}| = 12, |D_{13} \cap D_{15}| = |D_{195}| = 10,$$

$$|D_9 \cap D_{11} \cap D_{13}| = |D_{1287}| = 1, |D_9 \cap D_{11} \cap D_{15}| = |D_{495}| = 4,$$

$$|D_9 \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{585}| = 3, |D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{2145}| = 0,$$

$$|D_9 \cap D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{6435}| = 0.$$

Zauważmy, że  $D_9 \cap D_{15} = D_{45}$  (a nie  $D_{135}$ , ponieważ  $NWW(9, 15) = 45$ ), podobna ostrożność jest konieczna w przypadku  $D_9 \cap D_{11} \cap D_{15}$ ,  $D_9 \cap D_{13} \cap D_{15}$  itd. Na mocy zasady włączania i wyłączania mamy:

$$\begin{aligned} & |D_9 \cup D_{11} \cup D_{13} \cup D_{15}| \\ &= 222 + 181 + 153 + 133 - (20 + 17 + 44 + 13 + 12 + 10) \\ &+ (1 + 4 + 3 + 0) - 0 = 581. \end{aligned}$$

**4.3.** Z treści zadania wynika, że

$$\begin{array}{llll} B - \text{brydż} & |B| = 10 & |B \cap S| = 5 & |B \cap S \cap M| = 2 \\ S - \text{szachy} & |S| = 15 & |S \cap M| = 4 & \\ M - \text{monopol} & |M| = 12 & |B \cap M| = 3 & \end{array}$$

Z zasady włączania-wyłączania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |B \cup S \cup M| &= |B| + |S| + |M| - |B \cap S| - |S \cap M| \\ &\quad - |B \cap M| + |B \cap S \cap M| = 27. \end{aligned}$$

**4.4.** 9 osób gra w siatkówkę.

**4.5.** 15 osób biega, ale nie pływa i nie jeździ na rowerze.

**4.6.**  $\binom{10}{2} = 45$  oraz  $\binom{2n}{2} = 2(2n - 1)$ .

**4.7.** Niech  $L$  oznacza zbiór ludożerców,  $F$  – zbiór filozofów i  $M$  – zbiór matematyków. Z warunków zadania wynika, że  $\frac{1}{2}|L| \leq |F|$ , ale skoro połowa filozofów zajmuje się matematyką, a nikt z ludożerców nie zajmuje się jednocześnie filozofią i matematyką, to  $\frac{1}{2}|L| \leq \frac{1}{2}|F|$ , a więc  $|L| \leq |F|$ . Podobnie  $|F| \leq |M|$ ,  $|M| \leq |L|$ . Stąd  $|L| = |F| = |M|$ .

**4.8.** Gdyby było 12 kulek każdego koloru, to mielibyśmy 48 wszystkich kulek. Mamy  $50 = 4 \cdot 12 + 2$ , dlatego na mocy zasady szufladkowej Dirichleta musi być 13 kulek jednego koloru.

**4.9.** Tak, na podstawie zasady szufladkowej Dirichleta.

**4.10.** Nie.

**4.11.**  $!6 = 256$ .

**4.12.**

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

**4.13.**  $\{^8_4\} = 1701$ .

**4.14.**  $b_5 = 52$ .

**4.15.** Problem ten jest równoważny zagadnieniu zliczania podziałów uporządkowanych  $(A, B, C, D)$  danego zbioru dwudziestu osób, gdzie  $|A| = 3, |B| = 5, |C| = 7, |D| = 5$ . Zbiór  $D$  składa się z osób, które nie należą do żadnej komisji. Jest

$$\begin{aligned} \frac{20!}{3! \cdot 5! \cdot 7! \cdot 5!} &= \binom{20}{3} \cdot \binom{17}{5} \cdot \binom{12}{7} \cdot \binom{5}{5} \\ &= 1140 \cdot 6188 \cdot 792 \cdot 1 \approx 5,587 \cdot 10^9 \end{aligned}$$

możliwych sposobów utworzenia takich komisji. Zauważmy, że chociaż  $|D| = |B|$ , to komisja  $B$  i zbiór  $D$  odgrywają różne role. Kolejność bloków podziału jest istotna, interesuje nas więcej niż tylko sposoby rozbicia zbioru na jeden trzelementowy, dwa pięcioelementowych i jeden siedmioelementowy podzbiór.

**4.16.** Zliczamy podziały uporządkowane (porządek jest istotny), których jest:

$$\frac{19!}{5! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} \approx 3,911 \cdot 10^{10}.$$

**4.17.** W zadaniu pytamy o podziały nieuporządkowane. Jest

$$\frac{(3n)!}{(3!) (3!) \cdots (3!)} = \frac{(3n)!}{6^n}$$

podziałów uporządkowanych  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  takich, że każdy zbiór  $A_i$  ma 3 elementy. Dowolna permutacja  $n$  danych zbiorów wyznacza ten sam podział nieuporządkowany, więc jest

$$= \frac{(3n)!}{6^n \cdot n!}$$

podziałów nieuporządkowanych zbioru mającego  $3n$  elementów na  $n$  trzelementowych bloków.

**4.18.** Zadanie dotyczy zliczania podziałów nieuporządkowanych. Problem jest równoważny rozmieszczeniu 9 przedmiotów w 4 pudełkach, przy czym należy zacząć od włożenia jednego przedmiotu do pierwszego pudełka. Szukanych liczb jest więc:

$$\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165.$$

**4.19.** Pytamy o liczbę nieporządków zbioru pięcioelementowego, czyli  $!5 = 44$ .

**4.20.**  $\{^7_2\} = 63$ .

$$4.21. 5!\{^8_5\} = 120 \cdot 1050 = 126000.$$

$$4.22. b_6 = \{^6_1\} + \{^6_2\} + \{^6_3\} + \{^6_4\} + \{^6_5\} + \{^6_6\} = 1 + 31 + 90 + 65 + 15 + 1 = 203.$$

## Rozdział 5

5.1. Jest 10 takich podzbiorów, co wynika z postaci funkcji tworzącej:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) (1 + x + x^2 + x^3) \\ &\quad \times (1 + x + \dots + x^6 + x^7) \\ &= x^{14} + 3x^{13} + 6x^{12} + 10x^{11} + 14x^{10} + 17x^9 + 19x^8 \\ &\quad + 20x^7 + 19x^6 + 17x^5 + 14x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

Jest to współczynnik przy  $x^3$ .

5.2. Kolumnę o wymiarach  $2 \times 2 \times 2$  można zbudować na 3 sposoby (jedna kostka z dwóch cegieł), a kolumnę  $2 \times 2 \times 1$  na tylko jeden sposób (jedna cegła). Jeśli kolumnę o wysokości  $n$  można zbudować na  $a_n$  sposobów, to kolumnę o wysokości  $n + 1$  można zbudować na  $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$  sposobów. Funkcja tworząca:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n + x + 3x^2 \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} (a_{n-1} + 2a_{n-2}) x^n + x + 3x^2 \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x + 2x^2. \end{aligned}$$

Stąd:

$$A(x) = \frac{x + 2x^2}{1 - x - 2x^2} = x \frac{1 + 2x}{1 - x - 2x^2},$$

a także rozkładając na ułamki proste (patrz A.3):

$$\frac{1 + 2x}{1 - x - 2x^2} = \frac{2/3}{x + 1} + \frac{4/3}{x - 1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{i+1}}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^i}{3}.$$

Współczynniki  $a_n$  otrzymujemy z rozwinięcia funkcji  $A(x)$  w szereg potęgowy (patrz A.4). Wyrażają się one wzorem:

$$a(n) = \frac{2^{i+1} + (-1)^i}{3}.$$

Zarówno z tego wzoru, jak i ze wzoru rekurencyjnego otrzymujemy ten ciąg: 1, 3, 5, 11, 21, 43, ...

**5.3.** Funkcja tworząca:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n + x + 3x^2 \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} (a_{n-1} + 3a_{n-2}) x^n + x + 3x^2 \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 3x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x + 2x^2. \end{aligned}$$

Stąd:

$$A(x) = \frac{x + 2x^2}{1 - x - 3x^2}.$$

Współczynniki  $a_n$  otrzymujemy z rozwinięcia funkcji  $A(x)$  w szereg potęgowy. Wyrażają się one wzorem<sup>†</sup>:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-\left(\frac{-(\sqrt{13}-1)}{6} - 2\right) (\sqrt{13}-1)^{-n-1} 6^{n+1}}{3(\sqrt{13}-1) + 3} \\ &\quad - \frac{(\sqrt{13}+1)^{-n-1} \left(\frac{\sqrt{13}+1}{6} - 2\right) (-6)^{n+1}}{3 - 3(\sqrt{13}+1)}. \end{aligned}$$

Zarówno z tego wzoru, jak i ze wzoru rekurencyjnego otrzymujemy ten ciąg: 1, 3, 6, 15, 33, ...

**5.4.** Funkcja tworząca dla  $F_n$  jest postaci:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n + x \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n + \frac{x}{1-x-x^2} + x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^2 F_{n-2} x^n + \frac{x}{1-x-x^2} \\ &= xF(x) + x^2 F(x) + \frac{x}{1-x-x^2}. \end{aligned}$$

Stąd:

$$F(x) = \frac{x}{(1-x-x^2)^2}$$

---

<sup>†</sup>Otrzymanym za pomocą programu *Maxima*.

i następnie:

$$F_n = \sum_{i=1}^n f_i f_{n-i+1}$$

dla  $n \geq 1$ . Indukcyjnie można też udowodnić, że

$$F_n = \frac{2(n+1)f_n + nf_{n+1}}{5}.$$

Liczby  $F_n$  tworzą ciąg  $0, 1, 2, 5, 10, 20, 38, \dots$

**5.5.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = \frac{e^x}{1-x}.$$

**5.6.** Liczba Bella  $B_n$  jest liczbą podziałów zbioru  $n$ -elementowego na rozłączne i niepuste podzbiory. W każdym takim podziale element  $n$  należy do jednego ze zbiorów tego podziału. Podziały dzielimy na klasy tak, aby w klasie o numerze  $k$  podzbiór zawierający element  $n$  był  $k$ -elementowy. Pozostałe elementy poza  $n$  do podzbioru zawierającego  $n$  w klasie  $k$  można wybrać na  $\binom{n-1}{k-1}$  sposobów. Pozostałe  $n-k$  elementów można podzielić na  $B_{n-k}$  sposobów. Stąd:

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i} B_{n-i}.$$

Wykładnicza funkcja tworząca dla liczb Bella:

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

i jej pochodna:

$$\begin{aligned} B'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{x^k}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = B(x) e^x. \end{aligned}$$

Otrzymujemy  $B(x) = e^{e^x} - C e^x$ , gdyż wtedy  $B'(x) = e^{e^x-C} e^x = B(x) e^x$ . Ponieważ  $B(0) = 1$ , to  $C = 1$ . Stąd  $B(x) = e^{e^x-1}$ .

**5.7.** Ze wzoru (3.1.13) po podstawieniu  $k = l = r = n$  otrzymujemy wzór:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2.$$

Wystarczy porównać ten wzór ze wzorem (5.4.3).

**5.8.**

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{(n^n)^2 (e^{-n})^2 2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Stąd i ze wzoru (5.4.3) otrzymujemy rozwiązanie zadania.

## Rozdział 6

**6.1.** Tworzymy graf, którego wierzchołki oznaczają osoby w grupie, i łączymy krawędzią czerwoną tych, którzy się znają, a niebieską tych, którzy się nie znają. Zadanie sprowadza się do wykazania, że w grafie pełnym o sześciu wierzchołkach i krawędziach w dwóch kolorach zawsze istnieje jednokolorowy trójkąt. Z każdego wierzchołka wychodzą co najmniej trzy krawędzie tego samego koloru. Rozważmy, w jaki sposób możemy poprowadzić pozostałe krawędzie pomiędzy wybranymi czterema wierzchołkami. Jeśli dołączymy chociaż jedną czerwoną krawędź, to powstanie czerwony trójkąt, w przeciwnym przypadku niebieski, co kończy rozumowanie.

**6.2.** Graf planarny posiada  $m = rn/2$  krawędzi, gdzie  $r$  oznacza stopień wierzchołków,  $n$  – ich liczbę. Określamy krawędź jako otrzymanie pocztówki od osoby, do której się samemu napisało. Krawędź między wierzchołkami 1 oraz 2 oznacza to, że osoba 1 wysłała pocztówkę do osoby 2, a osoba 2 wysłała pocztówkę do osoby 1. Graf obrazujący sytuację w zadaniu ma  $3 \cdot 7/2 = 7.5$  krawędzi. Liczba ta nie jest całkowita, czyli jedna osoba dostałaby cztery pocztówki. Stąd wniosek, że nie może istnieć sytuacja, w której każda z osób dostanie pocztówkę od osoby, do której sama napisze.

Zadanie można też rozwiązać inaczej. Odpowiedź jest negatywna, gdyż otrzymalibyśmy graf o siedmiu wierzchołkach stopnia 3, a w grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego musi być parzysta.

**6.3.**

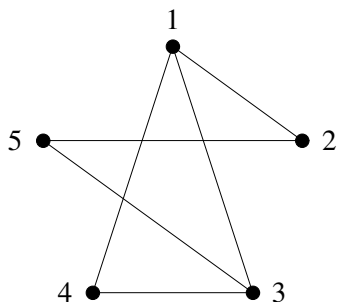
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.4.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

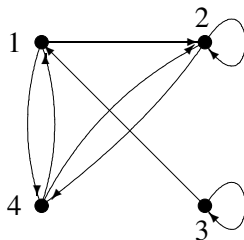
6.5.  $2(n-1)$ .

6.6. Patrz rysunek R.6.4.



Rysunek R.6.4. Graf do zadania 6.6

6.7. Patrz rysunek R.6.5.



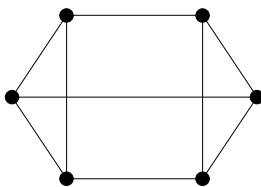
Rysunek R.6.5. Graf do zadania 6.7

6.8.

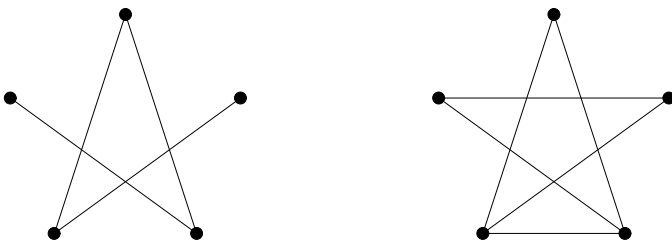
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.9. Patrz rysunek R.6.6.

6.10. Patrz rysunek R.6.7.



Rysunek R.6.6. Graf 3-regularny do zadania 6.9



Rysunek R.6.7. Grafy do zadania 6.10

**6.11.**

$G \setminus e$  – graf, z którego usunięta została jedna krawędź, zatem liczba krawędzi zmniejszy się o 1, a liczba wierzchołków zostanie bez zmian. Graf posiada  $n$  wierzchołków i  $m - 1$  krawędzi.

$G \setminus v$  – graf, z którego usunięto jeden wierzchołek. Liczba wierzchołków zmniejszy się o 1. Dodatkowo wraz z wierzchołkiem „znikną” wszystkie krawędzie z nim incydentne, czyli  $r$  (stopień wierzchołka). Otrzymany graf ma  $n - 1$  wierzchołków i  $m - r$  krawędzi.

$G/e$  – graf powstały przez ściągnięcie krawędzi. Liczba wierzchołków zmniejszy się o 1, ponieważ dwa stają się jednym. Liczba krawędzi zmniejszy się o 1, ponieważ z dwóch wierzchołków zrobiliśmy jeden, więc nie ma krawędzi łączącej. Powstanie graf o  $n - 1$  wierzchołkach oraz  $m - 1$  krawędziach.

**6.12.** Odległość między wierzchołkami w grafie spójnym to długość najkrótszej ścieżki łączącej te wierzchołki. Odległość między dwoma dowolnymi wierzchołkami w grafie Petersena wynosi:

- 1 – gdy wierzchołki sąsiadują ze sobą,
- 2 – gdy wierzchołki nie sąsiadują ze sobą.

**6.13.** Niech  $C$  i  $D$  będą cyklami takimi, że  $C \neq D$  oraz  $e \in C \cap D$ . Pokażemy, że istnieje cykl  $F \subset (C \cup D) \setminus e$ . Zbiory  $C \setminus e$  i  $D \setminus e$  są

niezależne, więc  $\rho(C \setminus e) = |C| - 1$ ,  $\rho(D \setminus e) = |D| - 1$ .

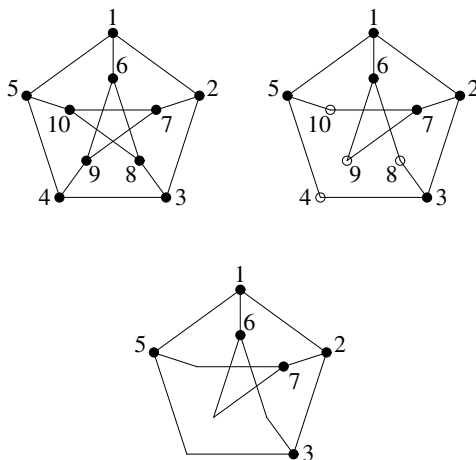
$$\begin{aligned} \rho(C \cup D) + \rho(C \cap D) &\leq \rho(C) + \rho(D) = |C| + |D| - 2 \\ &= |C \cup D| + |C \cap D| - 2. \end{aligned} \quad (\text{R.6.1})$$

Zbiór  $C \cap D$  jest niezależny, ponieważ jest podzbiorem właściwym obu cykli. Stąd  $\rho(C \cap D) = |C \cap D|$ . Na tej podstawie nierówność (R.6.1) przyjmuje postać:

$$\rho(C \cup D) \leq \rho(C \cup D) - 2. \quad (\text{R.6.2})$$

Założmy, że cykl nie istnieje. Wtedy zbiór  $(C \cup D) \setminus e$  jest niezależny,  $\rho((C \cup D) \setminus e) = |C \cup D| - 1$  i w konsekwencji otrzymujemy  $\rho((C \cup D) \setminus e) \geq |C \cup D| - 1$ , co jest sprzeczne z (R.6.2).

**6.14.** Z twierdzenia Kuratowskiego: dokonujemy operacji usunięcia i ściągnięcia, jak na rysunku R.6.8.



Rysunek R.6.8. Nieplanarność grafu Petersena

Ostatni graf to  $K_{3,3}$ .

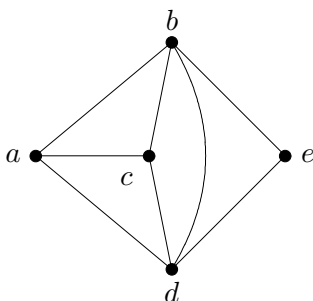
Inny sposób to skorzystanie z wniosku 6.3.4. W grafie Petersena  $|E| = m = 15$  i  $|V| = n = 10$ , najkrótszy cykl ma  $k = 5$  krawędzi. W ten sposób  $45 = (k - 2)|E| \not\leq k(|V| - 2) = 40$ . Stąd wniosek, że graf Petersena nie jest planarny.

**6.15.** W czterech częściach. Wskazówka: graf na rysunku R.6.9.

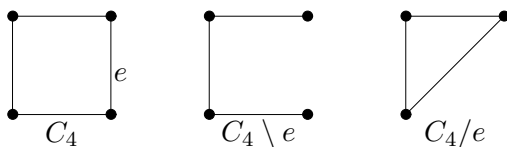
**6.16.**

$$P(C_4; k) = P(C_4 \setminus e; k) - P(C_4/e; k),$$

gdzie  $C_4 \setminus e$  i  $C_4/e$  pokazane są na rysunku R.6.10.



Rysunek R.6.9. Graf – wskazówka do zadania 6.15



Rysunek R.6.10. Skreślenie i ściągnięcie do zadania 6.16

**6.17.** Wskazówka. Zauważyć, że  $C_n/e = C_{n-1}$  oraz że  $C_n \setminus e$  jest drzewem o  $n$  wierzchołkach. Postępując tak jak w zadaniu 6.16, wzór udowodnić rekurencyjnie.

**6.18.**  $P(G; k) = k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k$ .

**6.19.**  $\chi(G) = 3, \chi'(G) = 4$ .

**6.20.**

- a)  $\chi(G) = 3$ ;
- b)  $\chi(G) = 4$ ;
- c)  $\chi(G) = 2$ ;
- d)  $\chi(G) = 2$ .

**6.21.**  $\chi'(G) = 4$ .

**6.22.**  $P(K_5; 6) = 6! = 720$ .

**6.23.** Oczywiście  $k \geq n$ . Pierwszy wierzchołek kolorujemy  $k$  kolorami, drugi  $k - 1$  kolorami i tak dalej, a ostatni  $k - n + 1$  kolorami. Stąd:

$$P(K_n; k) = k(k-1) \dots (k-n+1) = \frac{k!}{n!}.$$

## Rozdział 7

**7.1.** W grafie  $G_1$  z rysunku 7.20 wszystkie wierzchołki mają stopień parzysty, więc cykl Eulera istnieje. Stosując algorytm Fleury'ego (twierdzenie 7.1.2), można otrzymać na przykład cykl:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5, v_4, v_6, v_3, v_1).$$

W grafie  $G_2$  wierzchołki  $v_1$  oraz  $v_5$  mają stopnie nieparzyste, więc istnieje tylko droga Eulera, na przykład  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_1, v_5)$ .

### 7.2.

8	31	6	3	10	55	60	57
5	12	9	32	61	58	1	54
30	7	4	11	2	63	56	59
13	16	27	62	33	22	53	64
26	29	14	17	52	19	34	21
15	42	39	28	23	46	51	48
40	25	44	37	18	49	20	35
43	38	41	24	45	36	47	50

**7.3.** Tak, bo każdy wierzchołek ma stopień parzysty. Długość cyklu wynosi  $\binom{99}{2} = \frac{98 \cdot 99}{2} = 4851$ .

**7.4.** Graf pełny  $K_n$  jest:

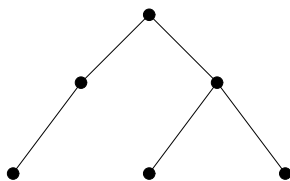
- eulerowski dla  $n$  nieparzystych (aby występował cykl Eulera, wszystkie wierzchołki muszą być parzystego stopnia, a stopień każdego wierzchołka w grafie pełnym  $K_n$  to  $n - 1$ ),
- półeulerowski dla  $n = 2$  (musi występować droga, czyli muszą być dokładnie dwa wierzchołki nieparzystego stopnia),
- hamiltonowski dla  $n \geq 3$ ,
- półhamiltonowski dla  $n \in N$ .

**7.5.** Graf pełny dwudzielny  $K_{m,n}$  jest:

- eulerowski dla  $m$  oraz  $n$  parzystych,
- półeulerowski dla  $m = n = 1$  lub  $m$  nieparzystego i  $n = 2$ , lub  $n$  nieparzystego i  $m = 2$  (gdy w jednym zbiorze liczba wierzchołków jest nieparzysta, a w drugim równa 2),
- hamiltonowski dla  $m = n$ ,
- półhamiltonowski dla  $m = n + 1$  lub  $n = m + 1$  (liczba wierzchołków w jednym zbiorze jest o jeden większa niż w drugim).

**7.6.** Na przykład  $i$ -ty wierzchołek w dopełnieniu  $\overline{G}_1$  grafu  $G$  z zadania 7.1 o siedmiu wierzchołkach stopnia  $d(v_i)$  ma parzysty stopień  $6 - d(i)$ .

**7.7.** Rysunek R.7.11.

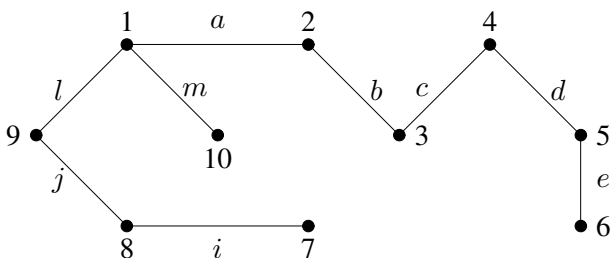


Rysunek R.7.11. Drzewo o sześciu wierzchołkach, z których trzy to liście

**7.8.** Graf  $G_1$  ma promień równy 1 i średnicę równą 2. Graf  $G_2$  ma promień równy 3 i średnicę równą 6. Graf  $G_3$  ma promień równy 3 i średnicę równą 5.

**7.9.** 432.

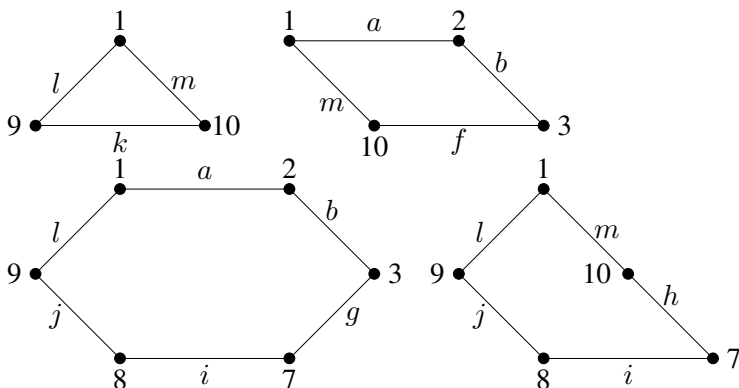
**7.10.**  $\gamma(G) = 13 - 10 + 1 = 4$ . Przykładowym drzewem spinającym grafu  $G$  jest drzewo pokazane na rysunku R.7.12.



Rysunek R.7.12. Drzewo spinające grafu z rysunku 7.22

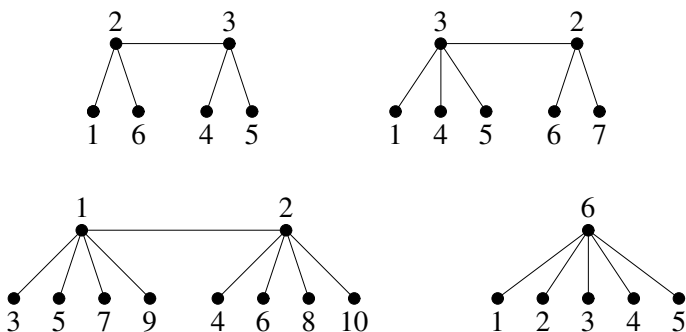
Zbiór cykli związanych z tym drzewem pokazany jest na rysunku R.7.13.

**7.11.** Niech  $e = \{u, v\}$ , a wierzchołek  $uv$  powstał przez ściągnięcie krawędzi  $e$ . Drzewa spinające grafu  $G \setminus e$  to te drzewa grafu  $G$ , które

Rysunek R.7.13. Zbiór cykli związanych z drzewem  $T$ 

nie zawierają krawędzi  $e$ . W drzewach spinających grafu  $G/e$  zastępujemy wierzchołek  $uv$  krawędzią  $e$  wraz z wierzchołkami  $u$  i  $v$ . Tak otrzymane drzewa to te drzewa spinające grafu  $G$ , które zawierają krawędź  $e$ . Stąd  $\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G/e)$ .

**7.12.** Drzewa na rysunku R.7.14.



Rysunek R.7.14. Drzewa o kodach Prüfera do zadania 7.12

**7.13.**  $k + 2$  wierzchołków oraz  $k + 1$  krawędzi.

**7.14.**

- a)  $\rho(G) = 9$ ,
- b) tak.

**7.15.** 3 dni.

**7.16.** Tak.

**7.17.** Dla  $n = 2$ :  $T(2, 2) = \frac{2!}{2!} S(2 - 2, 2 - 2) = 1 \cdot S(0, 0) = 1$ .

Założmy, że wzór jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej  $n \geq 2$ , to znaczy:

$$T(n, r) = \frac{n!}{r!} S(n - 2, n - r), n = 1, 2, \dots; r = 0, \dots, n.$$

Skorzystamy ze wzoru na liczbę  $F(n, k)$  spójnych grafów z  $n$  oznaczonymi wierzchołkami i  $k > 0$  krawędziami niemającymi końcowych wierzchołków (to znaczy wierzchołków incydujących z jedną tylko krawędzią):

$$F(n, k) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} c(n - i, k - i) (n - i)^i, c(0, 0), c(0, k) = 0,$$

gdzie  $c(n, k)$  oznacza liczbę spójnych grafów z  $n$  oznaczonymi wierzchołkami i  $k$  krawędziami. Dodatkowo wiemy, że liczba  $T(n)$  drzew z  $n$  oznaczonymi wierzchołkami jest równa  $T(n) = n^{n-2}$ . Biorąc pod uwagę, że  $c(n, n - 1) = T(n)$ , mamy:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i T(n - i) (n - i)^i = 0$$

dla  $n > 1$ . Korzystając z zasady włączania i wyłączenia oraz przyjmując  $T(0) = 1$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} T(n, r) &= (-1)^r \sum_{i=r}^n (-1)^i \binom{i}{r} \binom{n}{i} T(n - i) (n - i)^i \\ &= (-1)^r \frac{n!}{r!} \sum_{i=r}^n \binom{n - r}{n - i} T(n - i) (n - i)^i \\ &= (-1)^{2r} \frac{n!}{r! (n - r)!} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n - r}{j} T(n - j - r) (n - j - r)^{j+r}. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru Cayleya, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} T(n, r) &= \frac{n!}{r! (n - r)!} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n - r}{j} (n - j - r)^{n-r-j-2+j+r} \\ &= \frac{n!}{r!} \cdot \frac{1}{(n - r)!} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n - r}{j} (n - j - r)^{n-2}. \end{aligned}$$

Teraz korzystając z definicji liczb Stirlinga drugiego rodzaju, otrzymamy żądany rezultat.

**7.18.** Ponieważ  $T(n) = \sum_{r=0}^n T(n, r)$  oraz  $T(n, 0) = t(n, 1)$  dla  $n > 2$ , więc korzystając z zadania 7.17, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{r=2}^n \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} S(n-2, k) n(n-1) \cdots (n-k+1) = n^{n-2}. \end{aligned}$$

**7.19.** Korzystając z rekurencyjnej zależności dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju, możemy zapisać:

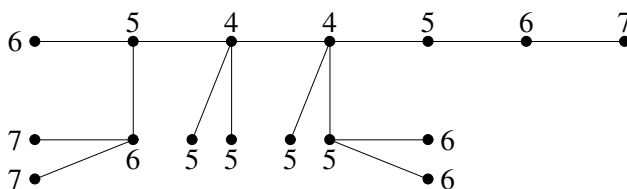
$$S(n-2, n-r) = (n-r) S(n-3, n-r) + S(n-3, n-r-1).$$

Z zadania 7.17 otrzymujemy:

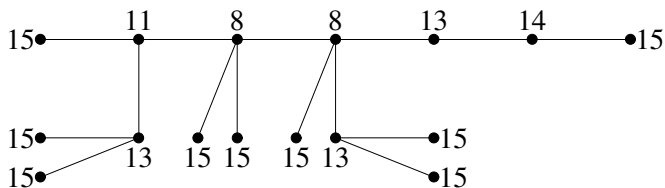
$$\begin{aligned} T(n, r) &= \frac{n!}{r!} (n-r) S(n-3, r-2) + S(n-3, n-r-1) \\ &= \frac{n(n-r)}{r} T(n-1, r-1) + nT(n-1, r). \end{aligned}$$

Stąd wynika wzór rekurencyjny z zadania.

**7.20.** Centrum tworzą wierzchołki o wadze  $w(v) = 4$  (rysunek R.7.15), natomiast centroid tworzą dwa wierzchołki o wadze  $w_t(v) = 8$  (rysunek R.7.16).



Rysunek R.7.15. Centrum drzewa z zadania 7.20

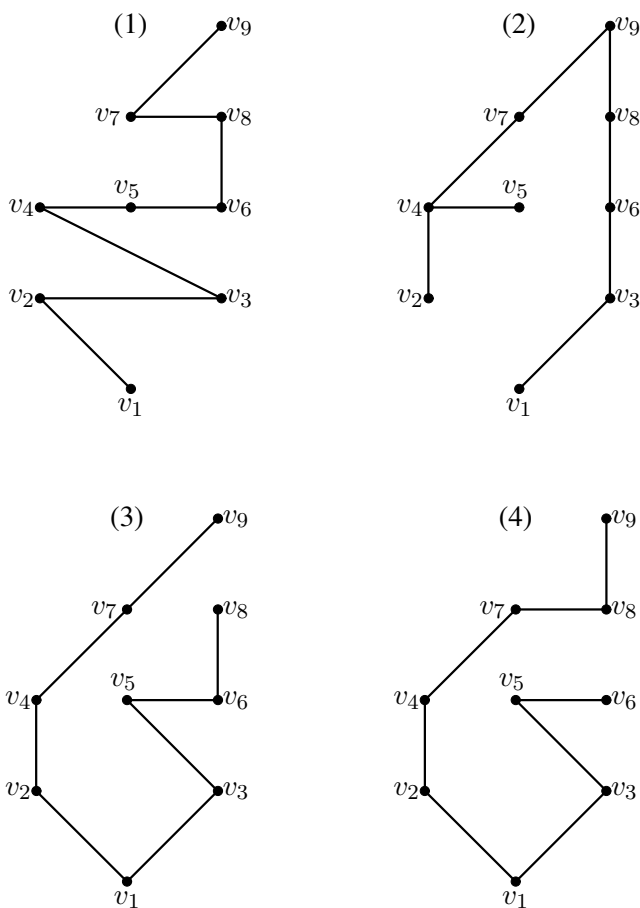


Rysunek R.7.16. Centroid drzewa z zadania 7.20

## Rozdział 8

**8.1.** Drzewa otrzymane algorytmem DFS na rysunku R.8.17:

- (1) z wierzchołka  $v_1$ , strategia a,
- (2) z wierzchołka  $v_1$ , strategia b,
- (3) z wierzchołka  $v_9$ , strategia a,
- (4) z wierzchołka  $v_9$ , strategia b.

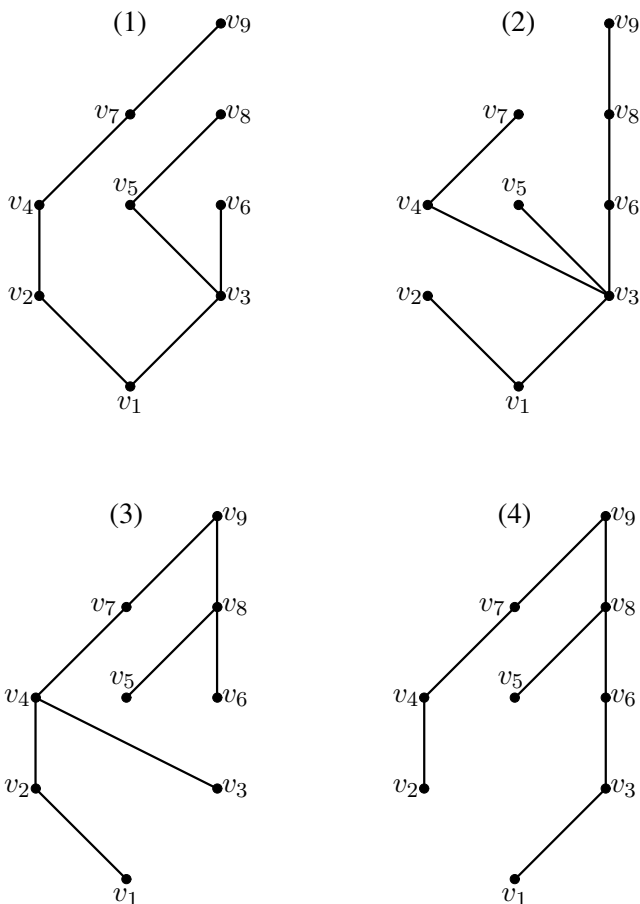


Rysunek R.8.17. Drzewa otrzymane algorytmem DFS – zadanie 8.1

Drzewa otrzymane algorytmem BFS na rysunku R.8.18:

- (1) z wierzchołka  $v_1$ , strategia a,
- (2) z wierzchołka  $v_1$ , strategia b,

- (3) z wierzchołka  $v_9$ , strategia a,  
 (4) z wierzchołka  $v_b$ , strategia b.



Rysunek R.8.18. Drzewa otrzymane algorytmem BFS – zadanie 8.1

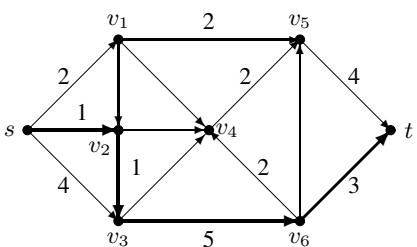
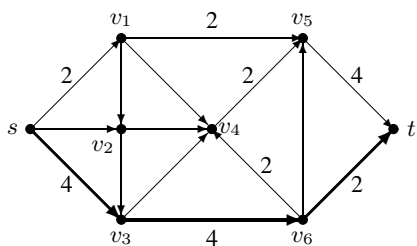
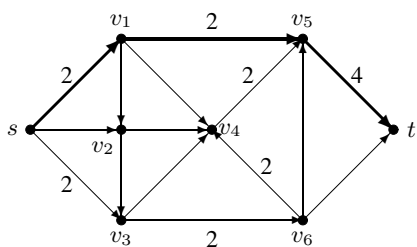
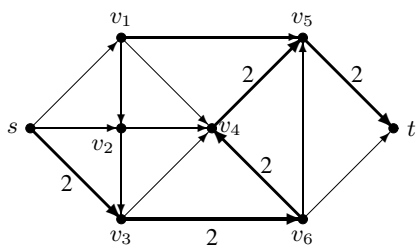
**8.2.**  $w(T) = 25$ .

**8.3.** Niech  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Wtedy krawędzie uporządkowane mająco:

$e_{ij}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$	$e_{23}$	$e_{24}$	$e_{25}$	$e_{34}$	$e_{35}$	$e_{45}$
$w(e_{ij})$	3/2	4/3	5/4	6/5	5/6	6/8	7/10	7/12	8/15	9/20

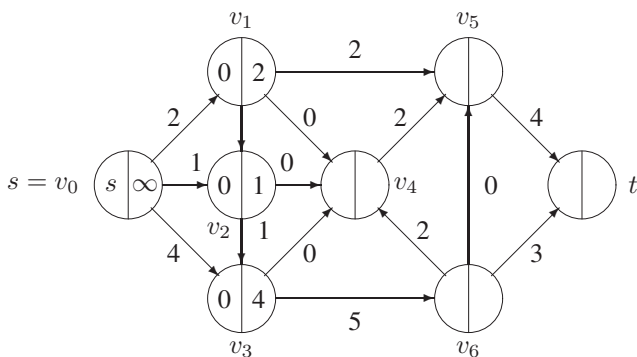
Minimalne drzewo spinające tworzą krawędzie:  $e_{15}, e_{25}, e_{35}, e_{45}$ .

**8.4.** Nasycamy zgodnie z algorytmem. 8.3.1 kolejne drogi łączące wejście  $s$  z wyjściem  $t$ , na przykład w sposób podany na rysunku R.8.19.



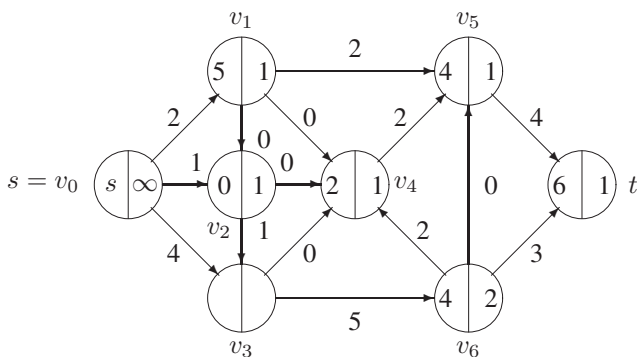
Rysunek R.8.19. Nasycanie dróg w sieci z zadania 8.4

Łańcuch nienasycony wyznaczamy za pomocą algorytmu 8.3.2, co przedstawia rysunek R.8.20.



Rysunek R.8.20. Wyznaczenie łańcucha nienasyconego w sieci z zadania 8.4

Łańcuch nienasycony ma postać  $(s, v_1, v_4, v_6, t)$  oraz  $\theta = 1$ . Modyfikujemy strumień zgodnie ze wzorem (8.3.4) i otrzymujemy strumień maksymalny  $\varphi$  o przepustowości  $\Phi_\varphi = 8$ . Inny łańcuch nienasycony przedstawia rysunek R.8.21.



Rysunek R.8.21. Wyznaczenie łańcucha nienasyconego w sieci z zadania 8.4, innego niż na rysunku R.8.20

Łańcuch nienasycony ma postać  $(s, v_2, v_4, v_6, t)$  oraz oczywiście  $\theta = 1$ . Jak poprzednio,  $\Phi_\varphi = 8$ .

**8.5.** Wystarczy zastąpić wierzchołek  $v$  o przepustowości  $c$  łukiem  $(v', v'')$  o przepustowości  $c$  takim, że  $\Gamma^-(v') = \Gamma^-(v)$  oraz  $\Gamma^+(v'') = \Gamma^+(v)$ .

## Rozdział 9

**9.1.** Niech  $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2$ . Mamy  $f(0) = f(1) = 1 \neq 0$ . Ponieważ stopień wielomianu  $f$  jest równy 3 oraz  $f$  nie ma pierwiastków w  $\mathbb{Z}_2$ , więc  $f$  jest nierozkładalny w  $\mathbb{Z}_2$ .

$GF(8) = GF(2^3)$  ma  $2^3$  elementów.

$$GF(8) = \{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1\}.$$

**9.2.** Niech  $f(x) = x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3$ . Mamy  $f(0) = f(2) = 2$  oraz  $f(1) = 1$ . Ponieważ stopień wielomianu  $f$  jest równy 3 i  $f$  nie ma pierwiastków w  $\mathbb{Z}_3$ , więc  $f$  jest nierozkładalny w  $\mathbb{Z}_3$ .

$$GF(9) = \{0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\}.$$

**9.3.**  $(1+x) + (x+x^2) = 1+2x+x^2 = 1+x^2$ ,  
 $(1+x)(x+x^2) = x+x^2+x^2+x^3 = x+2x^2+x^3 = x+x^3 = 1$ ,  
 $x^4 = x+x^2$ .

**9.4.**  $(1+x) + (2+x) = 3+2x = 2x$ ,  
 $(2+x) - (1+2x) = 1-x = 1+2x$ ,  
 $(1+x)(1+2x) = 1+2x+x+2x^2 = 1+3x+2x^2 = 1+2x^2 = 2+2x$ ,  
 $x^3 = 1+2x$ .

**9.5.** Dla rozwiązania równania  $t^2 + (x^2+1)t + 1 = 0$  podstawiamy rozwiązanie  $t$  tego równania postaci  $ax^2 + bx + c$ , gdzie  $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ . Mamy:

$$\begin{aligned} t^2 &= (ax^2 + bx + c)^2 = (ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + c) = a^2x^4 + abx^3 + acx^2 + abx^3 + b^2x^2 + bcx + acx^2 + bcx + c^2 = a^2x^4 + 2abx^3 + 2acx^2 + b^2x^2 + 2bcx + c^2 = a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 = ax^4 + bx^2 + c = \\ &= a(x^2+x) + bx^2 + c = (a+b)x^2 + ax + c. \end{aligned}$$

Następnie obliczamy:

$$\begin{aligned} (x^2+1)t &= (x^2+1)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^2 + bx + c = a(x^2+x) + b(x+1) + cx^2 + ax^2 + bx + c = ax^2 + ax + bx + b + cx^2 + ax^2 + bx + c = 2ax^2 + cx^2 + 2bx + ax + b + c = cx^2 + ax + b + c. \end{aligned}$$

Wobec tego wyjściowe równanie przyjmuje teraz postać:

$$(a+b)x^2 + ax + c + cx^2 + ax + b + c + 1 = 0$$

$$(a + b + c)x^2 + 2ax + b + 2c + 1 = 0$$

$$(a + b + c)x^2 + b + 1 = 0.$$

Ponieważ elementy  $\{x^2, x, 1\}$  tworzą bazę ciała  $GF(8)$  względem ciała  $\mathbb{Z}_2$ , więc powyższa równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest układ równań:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ b + 1 = 0. \end{cases}$$

Jest on równoważny układowi:

$$\begin{cases} a + b = c, \\ b = 1. \end{cases}$$

Stąd  $a = c + 1$ ,  $b = 1$ ,  $c \in \mathbb{Z}_2$ . Układ ma dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} a = b = 1, \\ c = 0 \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = c = 1. \end{cases}$$

Wobec tego  $t = x^2 + x$  lub  $t = x + 1$ .

Dla rozwiązania równania  $t^2 + t + x = 0$  postępujemy podobnie i dostajemy:  $t = x^2 + x$  lub  $t = x^2 + x + 1$ .

Równanie  $t^2 + t + x = 0$  ma rozwiązania  $t = x^2$  lub  $t = x^2 + 1$ .

Równanie  $t^2 + t + (x^2 + 1) = 0$  jest sprzeczne.

Równanie  $t^2 + (x^2 + 1)t + (x^2 + 1) = 0$  ma rozwiązania  $t = x$  lub  $t = x^2 + x + 1$ .

**9.6.** Wzór (9.2.2) wynika ze wzoru:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \dots + x + 1).$$

Ze wzoru (9.2.7) wynika, że:

$$\binom{x+1}{k+1}_q = \frac{q^{x+1} - 1}{q^{k+1} - 1} \binom{x}{k}_q$$

oraz

$$q^{k+1} \binom{x}{k+1}_q = q^{k+1} \frac{q^{x-k} - 1}{q^{k+1} - 1} \binom{x}{k}_q,$$

więc:

$$\frac{q^{k+1} (q^{x-k} - 1)}{q^{k+1} - 1} + 1 = \frac{q^{x+k} - 1}{q^{k+1} - 1}.$$

**9.7.** $q = 2$ 

1							
1	1						
1	3	1					
1	7	7	1				
1	15	35	15	1			
1	31	155	155	31	1		
1	63	651	1395	651	63	1	
1	127	2667	11811	11811	2667	127	1

 $q = 3$ 

1							
1	1						
1	4	1					
1	13	13	1				
1	40	130	40	1			
1	121	1210	1210	121	1		
1	364	11011	33880	11011	364	1	
1	1093	99463	925771	925771	99463	1093	1

**9.8.** Wystarczy zauważyć, że:

$$\frac{\binom{n}{k-1}_q}{\binom{n}{k}_q} = \frac{q^k - 1}{q^{n-k+1} - 1}.$$

**9.9.** Z nierówności  $q^{j-1} \leq q^j - 1 \leq q^j$  i  $\frac{q^m - 1}{q^n - 1} \geq q^{m-n}$  dla  $m \geq n$  wynika dowodzona nierówność.**9.10.** Na płaszczyźnie  $PG(2, q)$  mamy  $q^2 + q + 1$  punktów i  $q^2 + q + 1$  prostych. Liczba punktów na każdej z prostych jest równa  $q + 1$ . Jako pierwszy wierzchołek trójkąta możemy wziąć dowolny z  $q^2 + q + 1$  punktów, jako drugi dowolny z  $(q^2 + q + 1) - 1 = q^2 + q$ . Jako trzeci – dowolny punkt z wykluczeniem punktów leżących na prostej przechodzącej przez poprzednio wybrane wierzchołki, takich punktów jest  $(q^2 + q + 1) - (q + 1) = q^2$ . Na mocy prawa iloczynu liczba trójkątów jest równa  $(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2$ .**9.11.** Na płaszczyźnie  $PG(2, q)$  mamy  $q^2 + q + 1$  punktów. Wierzchołki czworokąta oznaczamy przez  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Jako  $M_1$  możemy wybrać dowolny z  $q^2 + q + 1$  punktów. Jako  $M_2$  dowolny z  $(q^2 + q + 1) - 1 = q^2 + q$ , jako  $M_3$  dowolny

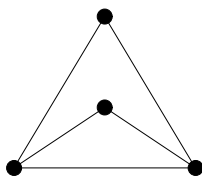
z  $(q^2 + q + 1) - (q + 1) = q^2$  i jako  $M_4$  dowolny z  $(q^2 + q + 1) - (q + 1 + q + 1 + q + 1 - 3) = (q - 1)^2$  punktów nieleżących na  $M_2M_3$ ,  $M_1M_2$  lub  $M_1M_3$ . Na mocy prawa iloczynu liczba czworokątów jest równa  $(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2(q - 1)^2$ .

## Rozdział 10

**10.1.** Matroid jest izomorficzny z matroidem macierzowym o macierzy  $M$ , w której kolumny odpowiadają elementom matroidu, czyli krawędziom grafu.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**10.2.** Najpierw wyznaczmy cykle w matroidzie bicyklicznym grafu  $K_4$ , opierając się na twierdzeniu 10.1.8. Ponieważ w  $K_4$  nie ma cykli ani wierzchołkowo, ani krawędziowo rozłącznych, to cykle mogą być tylko typu *teta*, takie jak na rysunku R.10.22. Każdy pięcioelementowy zbiór krawędzi jest cyklem. Wobec tego zbiorami niezależnymi są wszystkie czteroelementowe zbiory krawędzi. Oznacza to, że matroid bicykliczny grafu  $K_4$  jest matroidem 4-jednorodnym.



Rysunek R.10.22. Cykl w matroidzie bicyklicznym grafu  $K_4$

**10.3.** Matroid ma sześć elementów i rząd równy 3. Matroid jest izomorficzny z matroidem macierzowym o macierzy:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**10.4.** W każdym przypadku jest to matroid jednorodny.

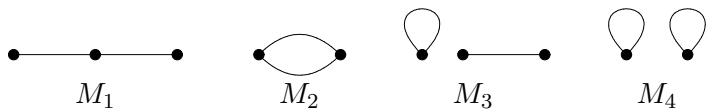
- (1)  $\mathcal{P}$  jest rodziną baz tylko wtedy, gdy  $m_1 = m_2 = m$ . Jeśli  $m = 0$ , to mamy matroid trywialny, a gdy  $m = n$ , to mamy matroid wolny.
- (2)  $\mathcal{P}$  jest rodziną cykli tylko wtedy, gdy  $m_1 = m_2 = m$ . Jeśli  $m = 1$ , to mamy matroid trywialny.
- (3)  $\mathcal{P}$  jest rodziną zbiorów niezależnych tylko wtedy, gdy  $m_1 = 0$ . Jeśli  $m = 0$ , to mamy matroid trywialny, a gdy  $m = n$ , to mamy matroid wolny.

**10.5.** W przykładzie 10.1.5 oznaczmy kolumny macierzy, czyli elementy matroidu macierzowego, jako  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ . Kolumny  $e_4$  i  $e_5$  są identyczne, więc zbiór  $\{e_4, e_5\}$  jest cyklem. Cyklami są też trójki  $\{e_i, e_j, e_k\}$  takie, że  $e_i + e_j + e_k = 0 \pmod 2$ . Trójek niezawierających pary  $\{e_4, e_5\}$  jest  $\binom{5}{3} + \binom{5}{2} = 30$ . W ten sam sposób badamy matroid macierzowy z przykładu 10.1.6.

**10.6.** Z przykładu 10.2.1 wynika, że dla  $\mathcal{F}$  nie istnieje transwersała, ale transwersała częściowa istnieje po usunięciu  $S_4$ , a więc również  $S_3$ . Jedna z transwersal częściowych jest pokazana w przykładzie 10.2.2.

**10.7.** Wszystkie matroidy na dwóch elementach  $E = \{e_1, e_2\}$  są grafowe, gdzie grafy są przedstawione na rysunku R.10.23, czyli:

- a)  $E$  jest bazą,
- b)  $E$  jest cyklem,
- c) jeden element jest pętlą, drugi jest bazą (jednoelementowym zbiorem niezależnym),
- d) oba elementy są pętlami.



Rysunek R.10.23. Grafy do zadania 10.7

Podobnie dla zbioru trzelementowego  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  z dokładnością do izomorfizmu mamy następujące przypadki:

- a)  $E$  jest bazą,
- b)  $\{e_1, e_2\}$  jest niezależny,  $e_3$  jest pętlą,
- c)  $\{e_1, e_2\}$  jest cyklem,  $e_3$  jest niezależny,
- d)  $\{e_1, e_2\}$  jest cyklem,  $e_3$  jest pętlą,

- e) wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru  $E$  są pętłami,
- f)  $e_1$  jest niezależny,  $e_2$  i  $e_3$  są pętłami,
- g) wszystkie elementy są pętłami.

**10.8.** Oznaczmy  $X = \{M, A, T, R, O, I, D, S\}$ ,  $|X| = 8$ . Transwersale mają po siedem elementów i są postaci  $X \setminus x$ , gdzie  $x \in X$ .

**10.9.** Transwersale są maksymalnymi zbiorami matroidu, co wynika z twierdzenia 10.2.4. Wobec tego fakt, że  $T_1 \setminus x \cup y$  jest bazą, wynika z własności  $(b_2)$  baz matroidu (str. 181).

**10.10.** Dla  $k = 1$  i  $k = 2$  odpowiedź jest oczywista: zbiory jedno- i dwuelementowe punktów płaszczyzny są niezależne. Dla  $k = 3$  jedynym podzbiorem sumy zbiorów  $\{1, 2, 4, 5\}$ , który nie jest niezależny, jest prosta  $\{1, 4, 5\}$ .

**10.11.** Grafy  $G'$  i  $G_1$  są izomorficzne. Podobnie izomorficzne są  $G''$  i  $G_2$ . Stąd wynika, że  $G'$  i  $G''$  nie są izomorficzne.

**10.12.** Z definicji operacji usunięcia i ściągnięcia można je wykonywać „element po elemencie”. Stąd wynikają oba wzory.

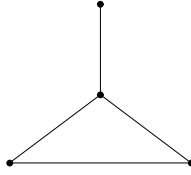
**10.13.** Tak jak w zadaniu 10.12, rozpatrzmy tylko przypadek  $(M/e)^* = (M^* \setminus e)$ . Jeśli  $e$  jest pętlą, to nie należy do żadnej bazy w  $M$  i należy do każdej bazy w  $M^*$ , co dowodzi wzoru w tym przypadku. Jeśli  $e$  nie jest pętlą, to:

$$\begin{aligned}
 & I \text{ jest niezależny w } (M/e)^* \\
 \iff & I \subseteq B \text{ dla pewnej bazy } B \text{ w } (M/e)^* \\
 \iff & I \subseteq (E \setminus e) \setminus B' \text{ dla pewnej bazy } B' \text{ w } M/e \\
 \iff & I \subseteq E \setminus B'' \text{ dla pewnej bazy } B'' = B' \cup e \\
 \iff & I \subseteq B''' \text{ dla pewnej bazy } B''' \text{ w } M^*, e \notin I \\
 \iff & I \text{ jest niezależny w } M^* \setminus e.
 \end{aligned}$$

**10.14.** Liczba baz jest wartością wielomianu Tutte'a w punkcie  $(1, 1)$ .  $T(F_3, 1, 1) = T(F_4, 1, 1) = 28$ . Liczba zbiorów niezależnych jest wartością wielomianu Tutte'a w punkcie  $(2, 1)$ .  $T(F_3, 2, 1) = 57$ ,  $T(F_4, 2, 1) = 92$ .

**10.15.** Bazami matroidu bicyklicznego grafu  $K_4$  są krawędzie grafów izomorficznych z grafem  $C_3^+$  z rysunku R.10.24 oraz cykle  $C_4$ . Zbiorami niezależnymi są więc również wszystkie cykle  $C_3$  oraz wszystkie lasy (w szczególności drzewa) tego grafu.

Zauważmy, że każdy podgraf o czterech krawędziach jest albo cyklem  $C_4$ , albo grafem  $C_3^+$ . Natomiast podgrafy o trzech krawędziach to albo



Rysunek R.10.24. Graf do zadania 10.15

cykle  $C_3$ , albo drzewa spinające. Stąd wniosek, że rozważany matroid jest izomorficzny z matroidem jednorodnym  $U_{6,4}$ , zaś jego wielomian Tutte'a wyraża się wzorem (10.4.5):

$$T(U_{6,4}; x, y) = \sum_{i=0}^4 \binom{6}{i} (x-1)^{4-i} + \sum_{i=5}^6 \binom{6}{i} (y-1)^{i-4}.$$

## Rozdział 11

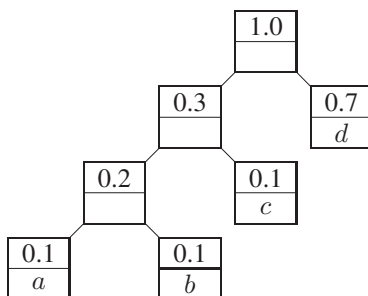
**11.1.** Zbiór pusty to drzewo składające się tylko z korzenia, więc warunek  $(g_1)$  jest spełniony. Warunek  $(g_2)$  jest również spełniony, gdyż dwa drzewa o zbiorach krawędzi  $F_1$  oraz  $F_2$  mają wspólny korzeń. W szczególności zachodzi to również, gdy  $F_1 \subset F_2$ .

**11.2.** Niech  $E$  będzie zbiorem  $mn$  elementów macierzy. Zbiorami niezależnymi są zbiory zawierające elementy z różnych kolumn. Rząd takiego matroidu jest równy  $m$ . Wobec tego algorytm zachłanny daje wynik największy.

**11.3.** Niech  $E$  będzie zbiorem  $n^2$  elementów macierzy. Niech  $\mathcal{F}$  tworzą zbiory elementów, które są w różnych wierszach i różnych kolumnach. Para  $(E, \mathcal{F})$  nie jest greedoidem, bo nie spełnia warunku  $(g_2)$ .

**11.4.** Sprawdzenia wymaga jedynie warunek  $(s'_4)$ . Jeżeli  $f \notin \sigma(A)$ , ale  $f \in (A \cup e)$  oraz  $f \neq e$ , to  $f$  leży na drodze od korzenia  $r$  do krawędzi  $e$ , której jeden z wierzchołków jest liściem. Ponieważ jest to jedyna taka droga, to  $e$  nie może leżeć na drodze od korzenia  $r$  do krawędzi  $f$ .

**11.5.** Drzewo kodowe, gdy zaczynamy od symboli  $a$  oraz  $b$ , przedstawione jest na rysunku R.11.25.



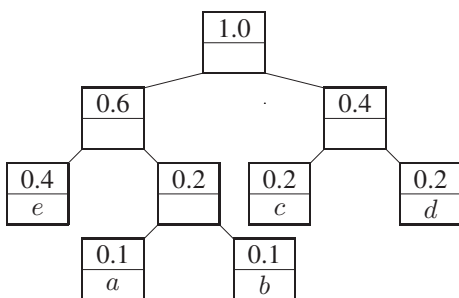
Rysunek R.11.25. Drzewo kodowe do zadania 11.5

Symbole i ich kody:

Symbol	Kod
$a$	000
$b$	001
$c$	01
$d$	1

$EL = 3 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1 + 0.7 = 1.5$ . Inne, choć izomorficzne drzewa kodowe otrzymamy, gdy zaczniemy od symboli  $a$  oraz  $c$  lub  $b$  oraz  $c$ . Zawsze jednak otrzymamy  $EL = 1.5$ .

**11.6.** Drzewo kodowe przedstawione jest na rysunku R.11.26,  $EL = 2.2$ .



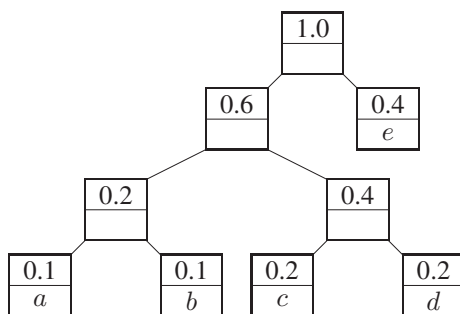
Rysunek R.11.26. Drzewo kodowe do zadania 11.6

Symbole i ich kody:

Symbol	Kod
$a$	010
$b$	011
$c$	10
$d$	11
$e$	00

Stąd  $EL = 2.2$ .

Inne drzewo kodowe przedstawione jest na rysunku [R.11.27](#).



Rysunek R.11.27. Drzewo kodowe do zadania [11.6](#)

Symbole i ich kody:

Symbol	Kod
$a$	000
$b$	001
$c$	10
$d$	11
$e$	1

Wtedy również  $EL = 2.2$ .

**11.7.**  $EL = 2.4$ .

# **Dodatki**



# A. Podstawowe pojęcia

## A.1. Notacja

Jeżeli  $p$  oraz  $q$  są zdaniami, to  $p \vee q$  oznacza „ $p$  lub  $q$ ”, natomiast  $p \wedge q$  oznacza „ $p$  i  $q$ ”. Forma zdaniowa  $P(x)$  staje się zdaniem, gdy ustalimy zmienną  $x$ , na przykład podstawiając  $x = x_0$  lub wiążąc zmienną  $x$  kwantyfikatorem ogólnym lub szczegółowym.

- Kwantyfikator ogólny (duży, uniwersalny)

$$\bigvee_{x \in A} P(x)$$

oznacza, że dla każdego  $x$  ze zbioru  $A$  spełniony jest warunek  $P(x)$ . Symbol  $\forall$  pochodzi od angielskiego *for all*. Innym często spotykanym oznaczeniem kwantyfikatora ogólnego jest  $\bigwedge$ :

$$\bigwedge_{x \in A} P(x).$$

- Kwantyfikator szczegółowy (mały, egzystencjalny)

$$\bigvee_{x \in A} P(x)$$

oznacza, że istnieje taki  $x$  w zbiorze  $A$ , który spełnia warunek  $P(x)$ . Symbol  $\exists$  pochodzi od angielskiego *exists*. Innym często spotykanym oznaczeniem kwantyfikatora szczegółowego jest  $\bigvee$ :

$$\bigvee_{x \in A} P(x).$$

Przy porównywaniu szybkości zmieniania się ciągów stosowane są oznaczenia:

- „ $o$ ” małe:  $a_n = o(b_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ,
- „ $O$ ” duże:  $a_n = O(b_n) \iff \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < c$  dla pewnego  $c > 0$ .

W szczególności  $a_n = o(1)$  oznacza, że  $a_n \rightarrow 0$ , natomiast  $a_n = O(1)$  oznacza, że ciąg  $a_n$  jest ograniczony.

Dla zbiorów liczbowych przyjmujemy oznaczenia:

- $\mathbb{N}$  – zbiór liczb naturalnych (bez zera),
- $\mathbb{Z}$  – zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbb{Z}^+$  – zbiór liczb całkowitych nieujemnych,
- $\mathbb{R}$  – zbiór liczb rzeczywistych,
- $\mathbb{R}^+$  – zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych.

W zbiorze liczb całkowitych nieujemnych wprowadza się relację daną wzorem  $a \equiv b \pmod n$ , którą nazywa się *przystawaniem* lub *kongruencją* o module (modulo)  $n$ . Relacja ta utożsamia ze sobą liczby o tej samej reszcie z dzielenia przez  $n$ .

## A.2. Zbiory

W całej książce słowo „zbiór” oznacza zbiór skończony, chyba że wyraźnie powiemy, że jest inaczej.

*Sumą zbiorów*  $A$  oraz  $B$  nazywamy zbiór

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Przyjmujemy konwencję, że zamiast pisać  $A \cup \{a\}$  (suma zbioru  $A$  oraz zbioru jednoelementowego  $\{a\}$ ) będziemy pisać  $A \cup a$ .

*Iloczynem zbiorów*  $A$  oraz  $B$  nazywamy zbiór:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

*Różnicą zbiorów*  $A$  oraz  $B$  nazywamy zbiór:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

*Różnicą symetryczną*  $A$  oraz  $B$  nazywamy zbiór:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

*Iloczynem kartezjańskim* zbiorów  $A$  oraz  $B$  nazywamy zbiór:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

*Relacja równoważności* to relacja zwrotna, symetryczna i przechodnia. Niech  $X$  będzie zbiorem, na którym określono relację równoważności  $R$ . *Klasą abstrakcji* (klasą równoważności) elementu  $x \in X$  względem relacji  $R$  nazywa się zbiór  $[x]_R = \{y \in X : xRy\}$ . Klasa

abstrakcji  $[x]_R$  elementu  $x$  nazywana jest też *warstwą* względem relacji  $R$ , reprezentowaną przez  $x$ .

Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem oraz  $B \subseteq A$ . Funkcją charakterystyczną (indykatorem) zbioru  $B$  nazywamy funkcję  $f : A \rightarrow R$  określoną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in B, \\ 0 & \text{dla } x \notin B. \end{cases}$$

*Przestrzeń metryczna* to para  $(X, d)$ , gdzie  $X$  jest niepustym zbiorem, natomiast

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

jest funkcją przyporządkowującą każdej parze jego elementów  $x$  oraz  $y$  nieujemną liczbę rzeczywistą  $d(x, y)$  spełniającą warunki:

- (1)  $d(x, y) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = y$ ,
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (3)  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ .

Liczbę  $d(x, y)$  nazywamy *odległością* elementów  $x$  oraz  $y$ , a funkcję  $d$  – *metryką*. Warunek (3) nazywa się warunkiem trójkąta. Para  $(X, d)$  jest *przestrzenią metryczną dyskretną*, gdy  $d$  jest metryką dyskretną zdefiniowaną na zbiorze  $X$  wzorem:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \neq y, \\ 0, & \text{gdy } x = y. \end{cases}$$

## A.3. Algebra

*Wektor*  $\vec{a}$  wymiaru  $n$  to ciąg liczb:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Zbiór wektorów  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych, jeśli równość:

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_k \vec{a}_k = \vec{0},$$

gdzie  $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ , zachodzi tylko dla  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ .

*Macierz*  $A$  to tablica prostokątna liczb  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$j = 1, 2, \dots, n$  zapisanych w  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Macierz transponowana  $A^T$  macierzy  $A$  to macierz, której wiersze są kolumnami macierzy  $A$ :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Jeżeli  $m = n$ , to mówimy, że  $A$  jest macierzą kwadratową stopnia  $n$ .

*Podmacierz* danej macierzy  $A$  to macierz powstała z macierzy  $A$  przez usunięcie z niej niektórych jej wierszy lub kolumn.

*Rząd macierzy*  $A$  to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów tworzących kolumny lub wiersze macierzy  $A$ . Rząd macierzy  $A$  oznaczamy przez  $r(A)$ .

*Wyznacznik*  $\det A$  macierzy kwadratowej  $A$  stopnia  $n$ , czyli macierzy o  $n$  wierszach i  $n$  kolumnach, to funkcja, która przyporządkowuje macierzy liczbę określoną wzorem rekurencyjnym:

- (1) jeżeli macierz  $A$  ma stopień  $n = 1$ , to  $\det A = a_{11}$ ,
- (2) jeżeli macierz  $A$  ma stopień  $n \geq 2$ , to dla dowolnego ustalonego  $i$  lub dowolnego ustalonego  $j$ :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

gdzie  $A_{ij}$  oznacza macierz powstałą z macierzy  $A$  przez usunięcie  $i$ -tego wiersza oraz  $j$ -tej kolumny.

Definicja ta jest równoważna definicji podanej na str. 36 i jest znana jako rozwinięcie Laplace'a.

*Dopełnieniem algebraicznym elementu*  $a_{ij}$  macierzy  $A$  nazywamy liczbę:

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Wtedy:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} d_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} d_{ij}.$$

Rząd macierzy jest równy stopniowi jej największej podmacierzy kwadratowej, której wyznacznik jest różny od zera. W szczególności macierz kwadratowa  $A$  stopnia  $n$  ma rząd  $r(A) = n$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\det(A) \neq 0$ .

*Funkcja wymierna* jest ilorazem dwóch wielomianów:

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Jeśli  $m < n$ , gdzie  $a_m \neq 0$  i  $b_n \neq 0$ , co będziemy dalej zawsze zakładać, to funkcja wymierna jest właściwa.

Jeśli wielomian w mianowniku ma wszystkie różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (jest ich wtedy dokładnie  $n$ ), to  $f(x)$  można rozłożyć na *ułamki proste*:

$$\frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}. \quad (\text{A.3.1})$$

Rozkład przedstawiony wzorem (A.3.1) jest jednoznaczny.

## A.4. Rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy

*Szereg potęgowy* to szereg postaci:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (\text{A.4.1})$$

Szereg potęgowy (A.4.1) jest zbieżny dla  $x \in (-r, r)$  i jest rozbieżny dla  $x \notin [-r, r]$ . Liczbę  $r$  nazywa się promieniem zbieżności. Na końcach przedziału  $x = -r$  oraz  $x = r$  szereg jest lub nie jest zbieżny. Łatwo zauważyć, że szereg potęgowy jest zbieżny co najmniej dla  $x = 0$ .

Promień zbieżności można obliczyć ze wzoru:

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

o ile ta granica istnieje. Jeśli  $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \infty$  dla  $n \rightarrow \infty$ , to  $r = 0$ , czyli szereg (A.4.1) jest zbieżny tylko dla  $x = 0$ . Jeśli  $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 0$ , to szereg (A.4.1) jest zbieżny dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ .

Zgodnie z twierdzeniem Maclaurina, jeśli  $f$  ma wszystkie pochodne

w pewnym otoczeniu punktu  $x = 0$ , to:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0). \end{aligned} \quad (\text{A.4.2})$$

Wzór (A.4.2) daje rozwinięcie funkcji  $f(x)$  w szereg potęgowy.

#### Przykład A.4.1

Rozwinięcia w szereg potęgowy dwóch szczególnie ważnych funkcji:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{dla } |x| < 1, \\ \exp x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

## A.5. Prawdopodobieństwo

Dyskretna zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości  $x_i$  z prawdopodobieństwami  $p_i$ , czyli  $\Pr(X = x_i) = p_i$ , gdzie  $p_i \geq 0$  dla wszystkich  $i$  oraz

$$\sum_i p_i = 1.$$

Wartość oczekiwana  $EX$  takiej zmiennej losowej dyskretnej  $X$  wyraża się wzorem:

$$EX = \sum_i x_i p_i, \quad (\text{A.5.1})$$

o ile zbieżny jest szereg:

$$E|X| = \sum_i |x_i| p_i. \quad (\text{A.5.2})$$

Jeśli szereg (A.5.2) nie jest zbieżny, to wartość oczekiwana  $EX$  nie istnieje, nawet jeśli jest zbieżny szereg (A.5.1). Jeśli zmienna losowa przyjmuje skończoną liczbę  $n$  wartości, to wartość oczekiwana zawsze istnieje, a wzór

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

jest średnią ważoną ciągu  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Wartość oczekiwana nosi też nazwę *średniej teoretycznej*.

## B. Sławni matematycy

Źródłem większości not biograficznych jest Wikipedia\*. Są one z natury bardzo skrótowe. O wielu matematycznych aspektach działalności osób wymienionych w tych notach można znaleźć informacje w książkach W. Więśława [27] i M. Kordosa [12].

**1. Niels Henrik Abel (1802–1829)** – norweski matematyk. Zajmował się różnymi gałęziami matematyki. Współtwórca funkcji eliptycznych i hiperbolicznych. Wykazał niemożność znalezienia ogólnego rozwiązania równań algebraicznych stopnia piątego i wyższych za pomocą skończonej liczby działań algebraicznych. Autor prac z zakresu teorii szeregów. W wieku 16 lat udowodnił wzór dwumianowy dla dowolnego wykładnika rzeczywistego. W 2001 roku rząd Norwegii zdecydował o ustanowieniu Nagrody Abela, która jest przyznawana za najwybitniejsze osiągnięcia w dziedzinie matematyki.

**2. Kenneth Ira Appel (1932–2013)** – amerykański matematyk, który wspólnie z W. Hakenem rozwiązał jeden z najsłynniejszych problemów w matematyce – twierdzenie o czterech barwach. W 1979 roku wspólnie z W. Hakenem otrzymali Nagrodę Fulkersona za badania nad problemem kolorowania map.

**3. Eric Temple Bell (1883–1960)** – amerykański matematyk i pisarz szkockiego pochodzenia. Zajmował się teorią liczb i kombinatoryką. Od jego nazwiska pochodzą takie pojęcia jak „liczby Bella”, „szeregi Bella”, „wielomiany Bella”. Autor licznych powieści science fiction, które pisał pod pseudonimem John Taine. Do dzisiaj wznawiane są szkice biograficzne *Men of Mathematics* (1937).

---

\*Patrz: <http://pl.wikipedia.org/wiki/>.

**4. Jakob Bernoulli (1654–1705)** – szwajcarski matematyk i fizyk. Stworzył podstawy rachunku prawdopodobieństwa. Przyczynił się do rozwoju rachunku różniczkowego i wariacyjnego. Wprowadził pojęcia całki i biegunowego układu współrzędnych. Największy wkład stanowi twierdzenie Bernoulliego dotyczące rozkładu dwumianowego.

**5. Rowland Leonard Brooks (1916–1993)** – matematyk angielski, znany jako autor twierdzenia o relacjach pomiędzy liczbą chromatyczną a liczbą wierzchołków w grafach. Po opuszczeniu Cambridge pracował jako inspektor podatkowy.

**6. Giovanni Cassini (1625–1712)** – włosko-francuski astronom i matematyk. Zajmował się obserwacją i badaniami układu słonecznego.

**7. Eugene Charles Catalan (1814–1894)** – belgijski matematyk. Prowadził badania naukowe w dziedzinach teorii liczb, geometrii wykreślnej, ułamków łańcuchowych oraz kombinatoryki. Wprowadził liczby Catalana do kombinatoryki.

**8. Augustin Louis Cauchy (1789–1857)** – francuski matematyk i fizyk. Autor wielu twierdzeń z analizy matematycznej i analizy zespolonej. Jego największym wkładem do matematyki są precyzja i ścisłość w metodologii pracy, jaką zapoczątkował. Sprecyzował podstawy analizy matematycznej, opierając je na pojęciach granicy i ciągłości. Podał definicje ciągłości funkcji i całki oznaczonej jako granicy sumy. Stworzył podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. Zapoczątkował studia nad grupami permutacyjnymi. Był współtwórcą teorii sprężystości. Opublikował ponad siedemset prac obejmujących badania nad teorią ciągów, teorią liczb, liczb zespolonych, teorią grup, teorią funkcji, równania różniczkowe, wyznaczniki.

**9. Arthur Cayley (1821–1895)** – angielski matematyk i prawnik. Napisał niemal tysiąc prac. Zajmował się geometrią algebraiczną. Prowadził badania nad równaniami różniczkowymi i funkcjami eliptycznymi. Współtwórca teorii wyznaczników. Autor wielu pojęć z algebry liniowej i pierwszej aksjomatycznej definicji grupy. W 1843 roku podał definicję  $n$ -wymiarowej przestrzeni liniowej. Opracował powstałą na gruncie geometrii algebraicznej teorię niezmienników. W 1858 roku ogłosił pracę zapoczątkującą rachunek macierzowy. Gruntownie przebadał algebrę macierzy i podał jej zastosowania. Powiedział, że cała geometria to geometria rzutowa. Współautor podziału geometrii na

eliptyczne i hiperboliczne w zależności od zakrzywienia przestrzeni, na której geometria została określona. Jego prace poświęcone geometrii wielowymiarowej znalazły zastosowanie w fizyce czasoprzestrzeni, a badania nad rachunkiem macierzy legły u podstaw sformułowania mechaniki kwantowej według W. Heisenberga.

**10.** Gérard Desargues (1591–1661) – francuski matematyk i architekt. Stworzył podstawy geometrii rzutowej. Jego imieniem nazwano jedno z pierwszych twierdzeń geometrii rzutowej.

**11.** Edsger Wybe Dijkstra (1930–2002) – holenderski informatyk. Zajmował się algorytmiką, językami programowania, formalną specyfikacją i weryfikacją. W 1972 roku otrzymał Nagrodę Turinga za wkład w języki programowania. Dziś znany jest przede wszystkim dzięki algorytmowi znajdowania najkrótszych ścieżek w grafie (znanemu jako algorytm Dijkstry) oraz problemowi uczujących filozofów.

**12.** Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) – angielski fizyk teoretyk. Jeden z twórców mechaniki kwantowej i elektrodynamiki kwantowej. Laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki w roku 1933 za wkład w rozwój mechaniki kwantowej. Wprowadził do fizyki funkcję zwaną funkcją Diraca. Uważał, że nauka rozwija się poprzez poszukiwanie teorii coraz ściślejszych. Najważniejszym odkryciem naukowym jest odkryte w 1928 roku równanie, zwane równaniem Diraca. Opisuje ono elektron w sposób relatywistycznie niezmienniczy. Równanie to pozwoliło mu przewidzieć istnienie pozytonu – antycząstki elektronu, oraz umożliwiło wyjaśnienie pochodzenia spinu elektronu. W 1933 roku wysunął hipotezę występowania we wszechświecie antymaterii.

**13.** Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) – belgijski matematyk. Dał swoje nazwisko zasadzie kombinatoryki znanej jako zasada szufladkowa. Autor wielu prac z dziedziny teorii liczb, szeregów liczbowych, analizy matematycznej, rachunku wariacyjnego i fizyki teoretycznej. Był pierwszym, który zastosował techniki analityczne w zagadnieniach teorii liczb. W 1837 roku rozwiązał jeden z problemów Gaussa – twierdzenie Dirichleta dla ciągów arytmetycznych. Otrzymany wynik jest uznawany za pierwszy w analitycznej teorii liczb. Udowodnił zbieżność szeregu Fouriera. Jego nazwiskiem została nazwana funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych.

**14.** Jack R. Edmonds (1934–) – kanadyjski matematyk i informatyk. Uważany za jednego z najważniejszych autorów w dziedzinie optymalizacji kombinatorycznej. Autor pierwszego algorytmu znajdującego skojarzenie maksymalne w grafie w czasie wielomianowym.

**15.** Jenő (lub Eugene) Egerváry (1891–1958) – węgierski matematyk. Interesował się teorią równań algebraicznych, równań różniczkowych, macierzy, geometrią. Uogólnił twierdzenie Kőniga dla przypadku grafów ważonych. Metoda oparta na twierdzeniu Kőniga-Egerváryiego została nazwana metodą węgierską i jest stosowana przy rozwiązywaniu problemu przydziału.

**16.** Leonhard Euler (1707–1783) – szwajcarski matematyk i fizyk. Uważany jest za czołowego matematyka XVIII wieku i jednego z najwybitniejszych w całej historii. Jeden z najbardziej produktywnych matematyków w historii. Autor ponad pięciuset prac z dziedziny matematyki. Prawie drugie tyle prac poświęcił zastosowaniom matematyki w fizyce, mechanice, teorii sprężystości, balistyce, marynistyce, muzyce. Pozostał niezwykle aktywny naukowo do końca życia pomimo zupełnej ślepoty, jaka dotknęła go 17 lat przed śmiercią. Wniósł wkład do niemal wszystkich ówczesnych dziedzin matematyki – geometrii, rachunku różniczkowego i całkowego, trygonometrii, algebry, teorii liczb. Dokonał licznych odkryć w tak różnych gałęziach matematyki jak rachunek różniczkowy i całkowy oraz teoria grafów. Znacznie przyczynił się do rozwoju terminologii i notacji matematycznej, szczególnie w dziedzinie analizy matematycznej. Jako pierwszy w historii użył pojęcia „funkcja” i pierwszy zastosował zapis  $f(x)$  dla oznaczenia funkcji  $f$  argumentu  $x$ . Był autorem nowoczesnego oznaczania funkcji trygonometrycznych, litery  $e$  jako podstawy logarytmu naturalnego (obecnie znanej także jako liczba Eulera), zastosowania greckiej litery  $\Sigma$  dla oznaczania sumy oraz litery  $i$  do wyrażenia jednostki urojonej. Użycie greckiej litery  $\pi$  dla oznaczenia stosunku obwodu okręgu do jego średnicy nie było wprawdzie jego autorstwa, ale zostało przez niego rozpropagowane. Przyczynił się do znacznego rozwoju szeregów potęgowych, był prekursorem wyrażania funkcji jako sumy nieskończenie wielu składników szeregu potęgowego. Opracował teorię funkcji specjalnych – wprowadzając funkcję  $\Gamma$ . Zapoczątkował rozwój nowoczesnej analizy zespolonej. Dał początki rachunkowi wariacyjnemu. Był pionierem użycia metod analitycznych w rozwiązywaniu problemów teorii liczb, odkrył związek między teorią liczb i analizą matematyczną. Odkrył też funkcję  $\varphi$  (zwaną funkcją  $\varphi$  Eulera), przy-

porządkującą każdej dodatniej liczbie całkowitej  $n$  liczbę mniejszą od  $n$ , która informuje, ile jest liczb względnie pierwszych z  $n$ , i korzystając z właściwości tej funkcji, uogólnił małe twierdzenie Fermata w postaci znanej obecnie pod nazwą twierdzenia Eulera o liczbach względnie pierwszych. W roku 1736 rozwiązał problem znany jako zagadnienie mostów królewieckich, uważane za pierwsze twierdzenie teorii grafów. Opublikował wiele ważnych prac z zakresu mechaniki, optyki i astronomii. Jednym z najniezwykleszych jego zainteresowań było stosowanie idei matematycznych w muzyce. W roku 1739 napisał *Tentamen novae theoriae musicae*, mając nadzieję zespolić teorię muzyki z matematyką.

**17.** Pierre Fermat (1601–1665) – francuski prawnik i jeden z największych matematyków w historii, chociaż matematyką zajmował się jako amator i za życia nie opublikował żadnej pracy. Stał się sławny dzięki korespondencji wymienianej z wielkimi matematykami tamtych czasów, takimi jak Kartezjusz, Mersenne czy Pascal. Cały wolny czas poświęcał na studiowanie matematyki, która była jego prawdziwą pasją. Wsławił się pracami z teorii liczb. Wniósł również duży wkład w geometrię i zastosowania granic funkcji do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych jeszcze przed powstaniem rachunku różniczkowego. Odkrył metodę znajdowania maksimów i minimów funkcji algebraicznych. Jego korespondencja z Pascalem z 1654 roku zawiera pierwszą znaną próbę zdefiniowania pojęcia prawdopodobieństwa. Interesował się też zastosowaniami rachunku prawdopodobieństwa do zagadnień z optyki. Wykazał, że równaniom pierwszego stopnia odpowiadają proste, a równaniom stopnia drugiego stożkowe (linie powstałe z przecięcia stożka płaszczyzną). Rozwiązał też wiele problemów z dziedziny geometrii analitycznej.

**18.** Norman Ferrers (1829–1903) – brytyjski matematyk.

**19.** Leonardo Pisano Fibonacci (1175–1250) – włoski matematyk. Autor wielu prac z geometrii, arytmetyki i teorii liczb. Najsłynniejsze jego dzieło *Liber Abaci*, wydane w 1202 roku, dotyczyło obliczeń (symboli i metod obliczeniowych). Zajmował się także teorią liczb (rozkład na czynniki pierwsze, kryteria podzielności), przytaczał proste zadania algebraiczne. Najbardziej znanym fragmentem książki jest ten, w którym pojawia się słynne zadanie o królikach – jego rozwiązanie nazywa się dziś ciągiem Fibonacciego. Zajmował się również między innymi arytmetyką handlową: opracowywał metody rozwiązywania zadań

z tej dziedziny oparte na proporcjach. Nauczał działań na ułamkach, które sprowadzał do wspólnego mianownika, znajdując najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników.

**20.** Lester Randolph Ford, jr. (1927–2017) – amerykański matematyk. Jeden z prekursorów w dziedzinie programowania sieci przepływowych. W 1956 roku wspólnie z ojcem (również utytułowanym matematykiem) napisali pracę dotyczącą maksymalnego przepływu – pierwszy algorytm maksymalizacji wartości przepływu. W 1962 roku razem z D. R. Fulkersonem wydał książkę *Flow in Networks*, która zawierała całość badań nad sieciami.

**21.** Delbert Ray Fulkerson (1924–1976) – amerykański matematyk, współautor algorytmu rozwiązującego problem maksymalnego przepływu. Po jego śmierci ustanowiono nagrodę jego imienia, która jest przyznawana co 3 lata w uznaniu dla nowatorskich publikacji z matematyki dyskretnej.

**22.** Tibor Gallai (1912–1992) – węgierski matematyk. Zajmował się kombinatoryką, szczególnie teorią grafów. Był wieloletnim przyjacielem i współpracownikiem Paula Erdősa, uczniem Dénisa Kőniga i doradcą László Lovászsa. Opisał grafy skończone z punktu widzenia skojarzeń.

**23.** Évariste Galois (1811–1832) – genialny francuski matematyk. Miał olbrzymie zasługi dla rozwoju algebry. Zajmował się zagadnieniami rozwiązywalności równań wielomianowych. Był jednym z prekursorów teorii grup oraz nowoczesnej teorii równań algebraicznych (teoria Galois). Jako pierwszy użył nazwy „grupa” w odniesieniu do tej struktury algebraicznej. Swoje wyniki przesłał do paryskiej Akademii Nauk, ale nie zostały one docenione. Zginął w pojedynku w wieku 20 lat. W liście napisanym ostatniej nocy przed śmiercią do swego przyjaciela, matematyka Augusta Chevaliera, zawarł swoje najważniejsze idee i osiągnięcia matematyczne. W liście tym prosił o przedstawienie swoich wyników Carlowi Gaussowi lub Carlowi Jacobiemu w celu wydania przez nich opinii, ale „nie o ich prawdziwości, lecz o ich ważności”. W 1843 roku francuski matematyk Joseph Liouville zebrał wszystkie prace Galois i wraz z komentarzem przesłał do Akademii Nauk w Paryżu. Opublikowano je dopiero 14 lat po śmierci autora. Leopold Infeld napisał powieść o jego życiu pod tytułem *Wybrańcy bogów*.

**24.** Carl Friedrich Gauss (1777–1855) – niemiecki matematyk, fizyk, astronom i geodeta. Uznawany jest za jednego z twórców geometrii nieeuklidesowej. Pierwszym ważnym odkryciem matematycznym Gaussa było podanie konstrukcji siedemnastokąta foremnego przy użyciu cyrkla i linijki. Pierwsze prace dotyczyły teorii liczb i algebr. Zajmował się również teorią rachunku różniczkowego i całkowego, teorią szeregów, metodami pomiarów geodezyjnych, statystyką matematyczną, geometrią sferyczną oraz geometrią nieeuklidesową. W wieku 18 lat odkrył metodę najmniejszych kwadratów. Był dyrektorem obserwatorium astronomicznego w Getyndze, przy którym założył pracownię geomagnetyczną do badań elementów magnetyzmu ziemskiego. W 1832 roku opracował układ jednostek miar CGS. Na jego cześć jednostkę indukcji magnetycznej nazwano gaussem. Wynalazł telegraf elektryczny. Uważany jest za jednego z największych matematyków, przez siebie współczesnych określany był mianem „Księcia matematyków” (łac. *princeps mathematicorum*). Jego podobizna widniała na dziesięciomarkowym banknocie.

**25.** Frank Gray (1887–1969) – amerykański fizyk i naukowiec pracujący dla Bell Labs. Wsławił się licznymi wynalazkami w dziedzinie telewizji mechanicznej i elektronicznej. Stał się znany ze względu na kod Graya (1953).

**26.** Alexander Gröthendieck (1928–2014) – urodzony w Niemczech matematyk francuski. Początkowo zajmował się teorią przestrzeni Banacha oraz przestrzeniami liniowo-topologicznymi i ich iloczynami tensorowymi. Jego prace poświęcone geometrii algebraicznej miały dla nauki znaczenie podstawowe. W 1988 roku zerwał ze światem, porzucił matematykę i osiedlił się w Pirenejach, gdzie żył w zupełnym odosobnieniu, zajmując się medytacją. Laureat medalu Fieldsa, którego przyjęcia odmówił. W 1988 roku odmówił również przyjęcia Nagrody Crafoorda, przyznawanej w dziedzinach, które nie są wyróżniane Nagrodą Nobla. Opublikował pamiętniki – bogate i niespójne, oraz wiele dzieł matematycznych.

**27.** Wolfgang Haken (1928–) – niemiecki matematyk, specjalizujący się w topologii. Razem z K. Appelem rozwiązał jeden z najsłynniejszych problemów w matematyce – twierdzenie o czterech barwach. W 1979 roku wspólnie z K. Appelem otrzymali Nagrodę Fulkersona za badania nad problemem kolorowania map.

**28.** Philip Hall (1904–1982) – angielski matematyk. Jego prace dotyczyły głównie zagadnień związanych z teorią grup, przede wszystkim grup skończonych oraz grup rozwiązywalnych. W 1961 roku został nagrodzony medalem Sylwestera, przyznawanym przez Royal Society. Znany jako autor twierdzenia „o kojarzeniu małżeństw” dotyczącego istnienia pełnego skojarzenia grafu dwudzielnego.

**29.** William Rowan Hamilton (1805–1865) – irlandzki matematyk, astronom i fizyk. Był dyrektorem obserwatorium astronomicznego i profesorem uniwersytetu w Dublinie oraz Królewskim Astronomem Irlandii. Jego prace dotyczyły algebry, mechaniki teoretycznej, optyki i rachunku wariacyjnego. Wprowadził wielowymiarowe uogólnienie liczby zespolonej (kwaterniony). Znał kilkanaście języków obcych. Znacznie przyczynił się do rozwoju astronomii, algebry, dynamiki i optyki geometrycznej. W 1859 roku opracował grę logiczną składającą się z drewnianego regularnego dwunastościanu, w którym wierzchołki opisano nazwami sławnych miast. Celem gry było znalezienie trasy przebiegającej wzdłuż krawędzi figury w taki sposób, aby przechodziła przez każde z miast dokładnie jeden raz i kończyła się w miejscu startu – czyli tworzyła cykl. Wprowadził algebrę nieprzezienną. Sformułował zasadę najmniejszego działania w mechanice.

**30.** Helmut Hasse (1898–1979) – niemiecki matematyk. Zajmował się teorią liczb.

**31.** David A. Huffman (1925–1999) – amerykański informatyk. Jego najbardziej znanym osiągnięciem jest opracowana w 1952 roku metoda kompresji bezstratnej, tak zwane kodowanie Huffmana.

**32.** Vojtěch Jarník (1897–1970) – matematyk czeski. Zajmował się teorią liczb, analizą matematyczną i algorytmami grafowymi.

**33.** Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) – niemiecki fizyk, twórca prawa promieniowania cieplnego dotyczącego zależności między zdolnością emisyjną i absorpcyjną oraz praw dotyczących obwodów elektrycznych. Współodkrywca cezu i rubidu, współwynalazca spektroskopu, a także współautor metody analizy spektralnej.

**34.** Dénes Kőnig (1884–1944) – węgierski matematyk. Autor pierwszego podręcznika z zakresu teorii grafów.

**35.** Bernhard H. Korte (1938 –) – niemiecki matematyk i informatyk. Specjalista w dziedzinie optymalizacji kombinatorycznej.

**36.** Leopold Kronecker (1823–1891) – niemiecki matematyk i logik. Od roku 1883 członek Akademii Nauk w Berlinie i profesor Uniwersytetu Humboldta. Zajmował się algebrą, teorią liczb i teorią funkcji. Propagował arytmetyzację matematyki, którą chciał sprowadzić do arytmetyki liczb całkowitych.

**37.** Joseph Bernard Kruskal (1928–2010) – amerykański matematyk. Autor jednego z najbardziej znanych algorytmów znajdujących minimalne drzewo spinające.

**38.** Kazimierz Kuratowski (1896–1980) – wybitny polski matematyk, autor prac z dziedziny topologii i teorii mnogości. Jeden z czołowych przedstawicieli warszawskiej szkoły matematycznej. Założyciel i dyrektor Instytutu Matematycznego PAN, wiceprezes Międzynarodowej Unii Matematycznej, członek zagranicznych akademii nauk. Doctor honoris causa wielu uczelni krajowych i zagranicznych. Autor ponad stu siedemdziesięciu prac naukowych. Specjalizował się w topologii, stworzył podstawy rozwoju teorii przestrzeni topologicznych. Ustalił terminologię i symbolikę wielu pojęć z zakresu teorii mnogości i topologii. Najcenniejsze jego wyniki dotyczą związków między topologią a teorią funkcji analitycznych. W dowodach wielu twierdzeń ma zastosowanie twierdzenie zwane lematem Kuratowskiego-Zorna. Jednym z najczęściej cytowanych jego twierdzeń jest podana w 1930 roku charakterystyka grafów planarnych.

**39.** Joseph Louis Lagrange (1736–1813) – matematyk, fizyk i astronom francuski pochodzenia włoskiego. Stworzył podstawy rachunku wariacyjnego. Zajmował się analizą matematyczną, teorią liczb, algebrą, równaniami różniczkowymi, rachunkiem prawdopodobieństwa, astronomią. Jest twórcą mechaniki teoretycznej. W czasie rewolucji francuskiej brał udział w reformowaniu systemu wag i miar.

**40.** Clement W. H. Lam – profesor Concordia University. Autor licznych prac o skończonych płaszczyznach rzutowych.

**41.** Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) – niemiecki filozof i matematyk. Początkowo zajmował się kombinatoryką. W 1666 roku opublikował pierwszą pracę matematyczną o kombinatoryce. Najgłębsze

badania Leibniza dotyczyły problematyki nieskończenie małych i dały początek jednej z najważniejszych dziedzin matematyki – rachunkowi różniczkowemu i całkowemu, za którego twórcę (obok Newtona) jest uważany. Spore znaczenie miał tu dobór symboliki, wprowadzone przez Leibniza symbole  $d$  oraz  $\int$ , reprezentujące odpowiednio różniczkę i całkę, syntetyzowały wiele pojęć matematycznych dotąd rozproszonych i nieprecyzyjnych. Wprowadził wiele symboli matematycznych używanych obecnie. Opisał mechanizm przybliżonego graficznego całkowania. Wyłożył początki teorii wyznaczników. Był prekursorem logiki formalnej.

**42.** László Lovász (1948 – ) – węgierski matematyk, profesor ceniony za wkład w rozwój kombinatoryki. Od 6 maja 2014 r. Prezes Węgierskiej Akademii Nauk.

**43.** Édouard Lucas (1842–1891) – francuski matematyk. Zajmował się algebrą. Badał ciąg Fibonacciego. Opracował metody testowania liczb pierwszych (test Lucasa-Lehmera). Interesował się rozrywkowymi zastosowaniami matematyki. W 1883 roku wymyślił grę zwaną „wieże z Hanoi”.

**44.** Colin Maclaurin (1698–1746) – szkocki matematyk. Był uczniem I. Newtona, członkiem Royal Society. Jego prace dotyczyły geometrii, analizy matematycznej i mechaniki. Zajmował się zbieżnością szeregów i teorią potencjału, podał rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy, a także teorię krzywych drugiego i trzeciego stopnia. Badając teorię pływów, stworzył tak zwaną elipsoidę Maclaurina. W jednej ze swoich prac użył szczególnego przypadku szeregu Taylora, który później został nazwany jego nazwiskiem. Innym osiągnięciem, nienoszącym jednak jego nazwiska, jest kryterium całkowite zbieżności szeregów nieskończonych.

**45.** Francesco Maurolico (1494–1575) – włoski matematyk i astronom. Zajmował się m.in. geometrią, optyką, mechaniką. Jest autorem pracy, która zawiera pierwszy znany dowód indukcyjny.

**46.** Karl Menger (1902–1985) – austriacki matematyk, syn ekonomisty Carla Mengera. Jeden z twórców teorii wymiaru. Znany z konstrukcji kostki Mengera (bryły fraktalnej, trójwymiarowego odpowiednika zbioru Cantora i dywanu Sierpińskiego). Pracował nad zagadnieniami geometrii hiperbolicznej i teorii funkcji. W 1938 roku wyemigrował do

USA. Udowodnił ważny wynik dotyczący paradoksu petersburskiego z zastosowaniami do teorii użyteczności w ekonomii. W teorii grafów znane są jego wyniki o spójności w skończonych grafach nieskierowanych. Wersja twierdzenia Menger'a o krawędziowej spójności została uogólniona przez twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju.

**47.** Leon Mirsky (1918–1983) – matematyk brytyjski rosyjskiego pochodzenia. Zajmował się teorią liczb, algebrą liniową i kombinatoryką. Napisał podręcznik *Transversal Theory*. Jako jeden z pierwszych uznał znaczenie matroidów transwersalnych.

**48.** Abraham de Moivre (1667–1754) – matematyk angielski pochodzenia francuskiego. Zajmował się geometrią analityczną, rachunkiem prawdopodobieństwa, teorią szeregów i liczbami zespolonymi. Podał wzory pozwalające na podnoszenie do potęgi i obliczanie pierwiastków  $n$ -tego stopnia liczb zespolonych oraz (niezależnie od J. Stirlinga) asymptotyczne przedstawienie  $n!$ . Pierwszy posługiwał się podnoszeniem do potęgi szeregów nieskończonych. Jest autorem prac z zakresu rachunku prawdopodobieństwa – udowodnił m.in. jedno z twierdzeń typu centralnego twierdzenia granicznego.

**49.** Pierre Rémond de Montmort (1678–1719) – francuski matematyk. Początkowo nazywał się Piotr Rémond. Znany jest ze względu na autorstwo książki o prawdopodobieństwie i grach losowych – książki, która wprowadziła rozważania kombinatoryczne o nieporządku. Nadał imię Pascala jego trójkątowi. Badał również różnice skończone.

**50.** Augustus De Morgan (1806–1871) – angielski matematyk i logik. Zajmował się głównie logiką formalną i teorią szeregów. Zwrócił uwagę na prawa nazwane później od jego nazwiska prawami De Morgana. W 1838 roku zdefiniował i wprowadził w sposób ścisły pojęcie indukcji matematycznej. Zapoczątkował prace nad teorią relacji.

**51.** Eunice Gogo Mphako-Banda (1968–) – urodzona w Malawi matematyczka.

**52.** Crispin St. John Alvah Nash-Williams (1932–2001) – angielski matematyk, pracujący także w Kanadzie. Zajmował się matematyką dyskretną i teorią grafów (szczególnie cyklami Hamiltona, grafami Eulera, drzewami spinającymi, problemem małżeńskim).

**53.** Isaac Newton (1642–1727) – angielski matematyk, fizyk, astronom i filozof, badacz Biblii i alchemik. Oprócz epokowych odkryć w dziedzinie fizyki jest również współtwórcą (obok Leibniza) rachunku różniczkowego i całkowego. Opracował metodę przybliżonego rozwiązywania równań algebraicznych, wzór interpolacyjny, pozwalający na znalezienie wielomianu  $n$ -tego stopnia przyjmującego w  $n$  danych punktach określone wartości. Podał własności krzywych trzeciego stopnia i ich klasyfikację. Przedstawił prawo powszechnego ciążenia i prawa ruchu leżące u podstaw mechaniki klasycznej. Sformułował zasadę zachowania pędu i momentu pędu. Podał twierdzenie o dwumianie. Był twórcą rachunku wariacyjnego.

**54.** Øystein Ore (1899–1968) – norweski matematyk. Znany z prac w dziedzinie teorii grafów, teorii pierścieni, teorii ciał. Sformułował i udowodnił twierdzenie dotyczące grafu hamiltonowskiego.

**55.** Blaise Pascal (1623–1662) – francuski matematyk, fizyk, filozof i teolog. W 1642 roku zaprojektował maszynę obliczeniową, która miała pomóc jego ojcu, poborcy podatkowemu w Normandii. Maszyna ta, zwana Pascaliną, była jednym z pierwszych mechanicznych kalkulatorów, które naprawdę działały. Wraz z Ch. Babbage’em uważany jest za pierwszego konstruktora komputerów. W wieku 11 lat przeprowadził niezależny dowód twierdzenia, że suma kątów trójkąta równa się podwojonemu kątowi prostemu. Swoje najważniejsze traktaty z geometrii rzutowej napisał w wieku 16 lat. W pracy z 1654 roku analizował i udowodnił własności trójkąta liczbowego, znanego dziś jako trójkąt Pascala. Największe jego osiągnięcia są związane z matematyką, w szczególności z rachunkiem prawdopodobieństwa. W korespondencji z Fermatem sformułował podstawy teoretyczne rachunku prawdopodobieństwa, który był przez Pascala nazywany geometrią losu. Rozważania te miały bardzo duży wpływ na rozwój nowoczesnej ekonomii i nauk społecznych. Wynałazł prasę hydrauliczną i strzykawkę. Po religijnym objawieniu w 1654 roku Pascal zakończył pracę naukową i wycofał się do zakonu, by poświęcić resztę swojego życia filozofii i religii.

**56.** Julius Petersen (1839–1910) – duński matematyk. Zajmował się geometrią, teorią funkcji, teorią liczb, fizyką matematyczną, ekonomią matematyczną, teorią grafów, kryptografią. Udowodnił, że w każdym grafie kubicznym bez mostów istnieje skojarzenie doskonałe. W 1898 roku pokazał, że najmniejszy graf kubiczny bez mostów nie

jest 3-kolorowalny krawędziowo. Skonstruował graf znany dziś jako graf Petersena.

**57.** Robert Clay Prim (1921–) – amerykański matematyk. Autor jednego z najbardziej znanych algorytmów znajdujących minimalne drzewo spinające.

**58.** Heinz Prüfer (1896–1934) – matematyk niemiecki. Zajmował się między innymi grupami abelowymi, liczbami algebraicznymi, teorią węzłów. Z jego nazwiskiem związane są pojęcia kodu Prüfera oraz grupy Prüfera.

**59.** Richard Rado (1906–1989) – urodzony w Niemczech matematyk brytyjski. Zajmował się głównie kombinatoryką i teorią grafów.

**60.** László Rédei (1900–1980) – matematyk węgierski. Jego prace dotyczą algebraicznej teorii liczb, algebry abstrakcyjnej, szczególnie teorii grup. Udowodnił, że każdy skończony turniej zawiera drogę Hamiltona.

**61.** Marian Adam Rejewski (1905–1980) – polski matematyk i kryptolog, który w 1932 roku złamał szyfr Enigmy, najważniejszej maszyny szyfrującej używanej przez hitlerowskie Niemcy. Sukces Rejewskiego i współpracujących z nim kryptologów z Biura Szyfrów, między innymi H. Zygalskiego i J. Różyckiego, ułatwił odczytywanie przez Brytyjczyków zaszyfrowanej korespondencji niemieckiej podczas II wojny światowej, przyczyniając się do wygrania wojny przez aliantów.

**62.** Herbert Ellis Robbins (1915–2001) – słynny amerykański matematyk i statystyk. Prowadził badania naukowe w dziedzinie topologii, teorii miary, statystyki i wielu innych. Współautor słynnej książki popularyzującej matematykę *Co to jest matematyka?*, napisanej razem z R. Courantem. Jest między innymi autorem twierdzenia o grafach orientowalnych.

**63.** Zbigniew Romanowicz (1932–2010) – polski matematyk specjalizujący się w analizie matematycznej i kombinatoryce. Popularyzator matematyki, autor wielu ciekawych, często bardzo trudnych zadań, wymagających czasem niezwyklej pomysłowości. Był wieloletnim przewodniczącym komitetu krajowego Międzynarodowych Mi-strzostw Francji Gier Matematycznych i Logicznych.

**64.** Jerzy Różycki (1909–1942) – polski matematyk i kryptolog. Absolwent i pracownik Uniwersytetu Poznańskiego oraz radiokontrywywiadu wojskowego (Biuro Szyfrów Referat 4) Oddziału II Sztabu Głównego WP. Wspólnie z M. Rejewskim i H. Zygalskim złamał kod niemieckiej maszyny szyfrującej Enigma, zbudował jej działającą kopię oraz urządzenia deszyfrujące szyfrogramy Enigmy.

**65.** J. M. S. Simões Pereira (1941 –) – portugalski i północnoamerykański matematyk.

**66.** Ernst Steinitz (1871–1928) – niemiecki matematyk. Najbardziej znana jest jego praca z 1910 roku zatytułowana *Algebraische Theorie der Körper*, w której podał pierwszą abstrakcyjną definicję ciała. Sformułował twierdzenie, zwane dziś od jego nazwiska twierdzeniem Steinitza o wymianie.

**67.** James Stirling (1692–1770) – szkocki matematyk. Zajmował się teorią szeregów nieskończonych i teorią krzywych algebraicznych trzeciego stopnia. Opracował wzór de Moivre’a na silnię.

**68.** Lucjan Szamkołowicz (1927–1984) – polski matematyk, specjalizował się w teorii grafów. Prowadzone przez niego seminarium z teorii grafów było w latach siedemdziesiątych XX wieku centralnym miejscem spotkań matematyków zajmujących się tą dziedziną matematyki.

**69.** Niccolò Tartaglia (właściwie Niccolò Fontana) (1499 lub 1500–1557) – wybitny włoski matematyk, autor prac z dziedziny matematyki, mechaniki, balistyki, geodezji, teorii fortyfikacji itp. Odkrył trójkąt zwany trójkątem Pascala. Odkrył również metodę rozwiązywania równań algebraicznych trzeciego stopnia, wykrył ją innemu matematykowi włoskiemu, który opublikował ją w swoim podręczniku algebry – dlatego wzór na rozwiązanie równań sześciennych niesprawiedliwie nazywa się wzorem Cardana. W 1551 roku opisał dokładnie pierwszą komorę do nurkowania.

**70.** Carsten Thomassen (1948–) – duński matematyk. Jego badania dotyczą matematyki dyskretnej, szczególnie teorii grafów. Jest redaktorem naczelnym czasopism „Journal of Graph Theory” i „Electronic Journal of Combinatorics”.

**71.** William Thomas Tutte (znany jako Bill Tutte) (1917–2002) – brytyjski, a potem kanadyjski chemik, matematyk i łamacz kodów. Pracował w ośrodku, w którym doszło do rozpracowania Enigmy. W styczniu 1941 roku zaczął pracę jako kryptoanalityk na rzecz aliantów. W trakcie prac złamał szyfr kodów kryptograficznych wojska niemieckiego znanych jako FISH – był to jeden z największych wyczynów intelektualnych czasów II wojny światowej. Oprócz badania struktury wewnętrznej maszyn szyfrujących FISH Tutte pisał algorytmy rozszyfrowujące kody. Znalazły one zastosowania wiele lat później w Collosusie – ówczesnym komputerze zaprojektowanym specjalnie do rozszyfrowywania enigmatycznych kodów nieprzyjaciela. Prace, w których uczestniczył, doprowadziły do odkryć, które później znalazły zastosowanie w szyfrowaniu, algorytmice oraz projektowaniu komputerów. Stał się prekursorem technik obliczeniowych w kontekście map. Jest autorem 168 artykułów naukowych i kilku książek, które znacząco wpłynęły na rozwój teorii grafów, a wraz z nią kombinatoryki i matematyki dyskretnej. Dziś wiele zagadnień związanych z grafami nosi jego imię. Wielomiany jego imienia odgrywają ważną rolę w teorii grafów i teorii matroidów.

**72.** Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) – francuski muzyk, matematyk i chemik. Zajmował się algebrą.

**73.** Vadim Georgievich Vizing (1937–) – ukraiński matematyk, znany jako autor twierdzenia o relacji między największym stopniem wierzchołka w grafie a liczbą chromatyczną. Zajmował się teorią grafów i problemem szeregowania.

**74.** Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) – niemiecki matematyk. Zajmował się między innymi teorią funkcji analitycznych, teorią szeregów, rachunkiem wariacyjnym. Opracował logiczne podstawy analizy matematycznej. Był twórcą precyzyjnego pojęcia granicy funkcji.

**75.** Hassler Whitney (1907–1989) – amerykański matematyk. Jeden z twórców teorii osobliwości, autor prac z teorii rozmaitości. Jego wczesne prace dotyczyły teorii grafów, szczególnie kolorowania grafów. W 1930 roku niezależnie od B. L. van der Waerdena wprowadził pojęcie matroidu.

**76.** Edouard Zeckendorf (1901–1983) – belgijski lekarz wojskowy i matematyk. W matematyce znany głównie dzięki dowodowi twierdzenia o reprezentacji liczb całkowitych jako sum liczb Fibonacciego.

**77.** Henryk Zygański (1908–1978) – polski matematyk i kryptolog. Wynalazł tak zwaną „płachtę Zygalskiego”, dzięki której wspólnie z M. Rejewskim i J. Różyckim złamał kod niemieckiej maszyny szyfrującej Enigma i zbudował jej działającą kopię.

# Literatura

- [1] A. V. Aho, J. D. Ullman, *Wykłady z informatyki z przykładami w języku C*, Helion, Gliwice 2003.
- [2] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Dowody z książki*, PWN, Warszawa 2002.
- [3] A. Y. Bhargava, *Algorytmy. Ilustrowany przewodnik*, Helion, Gliwice 2017.
- [4] V. Bryant, *Aspekty kombinatoryki*, WN-T, Warszawa 1997.
- [5] J. Cichoń, *Wykłady ze wstępu do matematyki*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2003.
- [6] T. H. Cormen, *Algorytmy bez tajemnic*, Helion, Gliwice 2013.
- [7] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, *Wprowadzenie do algorytmów*, wydanie 2, WNT, Warszawa 2004.
- [8] A. Drozdek, *Wprowadzenie do kompresji danych*, WN-T, Warszawa 1999.
- [9] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, wydanie 4, PWN, Warszawa 2003.
- [10] J. Jaworski, Z. Palka, J. Szymański, *Matematyka dyskretna dla informatyków*, tom I, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2007.
- [11] D. E. Knuth, *Sztuka programowania*, tom I, WNT, Warszawa 2002.
- [12] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994.
- [13] W. Lipski, *Kombinatoryka dla programistów*, WNT, Warszawa 2009.
- [14] W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1986.
- [15] A. Nowicki, *Podróże po Imperium Liczb*, OWSZiI, Olsztyn, Toruń 2012–2014.

- [16] Z. Palka, A. Ruciński, *Wykłady z kombinatoryki*, tom 1, WNT, Warszawa 1998.
- [17] R. Rębowski, *Matematyka dyskretna dla informatyków*, PWSZ w Legnicy, Legnica 2008.
- [18] R. Rębowski, J. Płaskonka, *Zbiór zadań z matematyki dyskretniej dla informatyków*, PWSZ w Legnicy, Legnica 2009.
- [19] K. A. Ross, C. R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*, wydanie 5, PWN, Warszawa 2013.
- [20] K. A. Rybnikow (red.), *Analiza kombinatoryczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 1988.
- [21] R. Sedgewick, *Algorytmy w C++*, Wyd. RM, Warszawa 1999.
- [22] R. Sedgewick, *Algorytmy w C++. Część 5. Grafy*, Wyd. RM, Warszawa 2003.
- [23] M. M. Sysło, *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne*, Helion, Gliwice 2015.
- [24] M. M. Sysło, *Algorytmy*, Helion, Gliwice 2016.
- [25] L. Szamkołowicz, *Teoria grafów skończonych*, Ossolineum, Wrocław 1973.
- [26] R. J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, wydanie 2, PWN, Warszawa 2012.
- [27] W. Więśław, *Matematyka i jej historia*, Nowik, Opole 1997.
- [28] P. Wróblewski, *Algorytmy. Struktury danych i techniki programowania*, Helion, Gliwice 2015.
- [29] M. Zakrzewski, *Matematyka dyskretna. Markowe Wykłady z Matematyki*, GiS, Wrocław 2014.
- [30] M. Zakrzewski, T. Żak, *Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i zdrowy rozsądek*, Oficyna Wydawnicza QUADRIVIVUM, Wrocław 1998.

# Skorowidz

- aksjomat wymiany, 207
- alfabet, 206
- algorytm
  - rozwiązywania równania rekurencyjnego, 75
- Dijkstry, 155
- Fleury'ego, 121
- Huffmana, 209
- Kruskala, 153, 208
- najbliższego sąsiada, 153
- najkrótszej drogi, 155
- Prima, 153, 208, 212
- przeszukiwania
  - w głąb, 150
  - wszerz, 149
- zachłanny, 154, 207
- antyłańcuch, 14
- antymatroid, 205
- atom kraty, 172, 173, 176, 178
- baza
  - cykli, 134
  - greedoidu, 203
  - matroidu, 181, 186
  - systemu zachłannego, 203
- bijekcja, 27, 30
- blok, 54, 57
- centroid, 138
- centrum, 107, 138
- charakterystyka ciała skończonego, 170
- ciało
  - binarne, 170
  - Galois, 170
  - skończone, 169
  - wielomianów, 170
- ciąg
  - arytmetyczny, 17
  - geometryczny, 17
  - rekurencyjny, 17
  - zrównoważony, 80
- cięcie
  - grafu, 127, 131, 135
  - minimalne, 131, 194
- cięciwa grafu, 134
- cykl
  - Eulera, 120, 122, 144
  - grafu, 86
  - Hamiltona, 122
  - matroidu, 182, 186
  - permutacji, 33, 37
  - prosty, 87
- dendryt, 131
- diagram
  - Ferrersa, 68
  - Hassego, 12
- digraf, 88
- prosty, 88
- silnie spójny, 125
- długość
  - cyklu, 87
  - permutacji, 33, 37
  - drogi, 86
  - słowa kodowego, 210
- dopełnienie
  - algebraiczne, 264
  - grafu, 107, 144
- dren, 157
- droga, 86
  - Eulera, 120, 144
  - Hamiltona, 122
  - minimalna, 152
  - prosta, 86
- drogi
  - krawędziowo rozłączne, 128

- wierzchołkowo rozłączne, 128
- drzewo, 87, 112, 115, 129
  - binarne, 16, 136
  - Huffmana, 210
  - przeszukiwań, 149
  - puste, 16, 136
  - spinające, 131, 135, 186
    - minimalne, 152
- dziedzina funkcji, 27
- element
  - maksymalny, 12
  - minimalny, 12
  - najmniejszy, 12
  - największy, 12
- elementy porównywalne, 12
- fundamentalny zbiór
  - cięć, 135
  - cykli, 134
- funkcja, 27, 28, 57
  - charakterystyczna, 263
  - chromatyczna, 114
  - modularna, 211
  - na, 27, 66
  - rozpięcia, 184
  - różnowartościowa, 27, 29
  - rzędu, 184
  - submodularna, 184, 211
  - tworząca, 72
    - rząd, 196
    - wykładnicza, 72
  - wymierna, 265
- gałąź drzewa, 134
- generator Fibonacciego, 23
- generowanie
  - podzbiorów, 49
  - podziałów zbioru, 55
- geometria
  - afiniczna, 178, 185
  - rzutowa, 175, 185, 197
- graf, 85
  - $k$ -kolorowalny, 111
  - acykliczny, 87, 129, 157
  - bichromatyczny, 112
  - dualny, 194
  - dwudzielny, 105, 106, 112, 114, 123, 142, 162
    - regularny, 163
  - eulerowski, 120, 125, 144
  - hamiltonowski, 122, 144
  - krawędziowy, 114
  - kubiczny, 105
  - nieskierowany, 86, 152
  - niezorientowany, 86
  - orientowalny, 125
  - pełny, 104, 112, 123, 132, 137, 144
    - dwudzielny, 106, 144
  - Petersena, 105, 107, 112, 118
  - planarny, 108, 109, 113, 194
  - płaski, 108
  - póleulerowski, 120, 144
  - półhamiltonowski, 144
  - prosty, 86, 114, 137
  - regularny, 105
  - silnie spójny, 87
  - skierowany, 88, 122, 125
  - spójny, 87, 101, 106, 120, 122, 127, 129, 137
    - krawędziowo, 127
  - ważony, 152
  - zorientowany, 88, 122, 125
- greedoid, 203, 205
  - przeszukiwań
    - łuków, 206
    - wierzchołków, 206
- grupa, 31
  - abelowa, 32, 169, 199
  - addytywna, 169
  - multiplikatywna, 169
  - permutacji, 33
  - przemienna, 169
  - skończona, 169
- gwiazda, 87
- $H$ -przepływ, 199
- iloczyn
  - kartezjański, 262
  - zbiorów, 262
- indeks chromatyczny, 113, 118
- indykator, 263
- iniekcja, 27

- inwersja permutacji, 35, 42
- izomorfizm
  - ciał skończonych, 170
  - drzew, 136
  - grafów, 102
- język, 206
  - prosty, 206
  - zachłanny, 206, 207
- klasa abstrakcji, 55, 263
- klika grafu, 107
- kobaza, 193
- kocykl, 131, 193
- kod
  - Graya, 48, 122
  - Huffmana, 209
  - Prüfera, 132, 145, 243
- kodrzewo, 131
- kombinacje, 44
- kongruencja, 262
- konkatenacja, 206
- kopęta, 193
- korzeń, 16, 87
- krata, 14, 178
  - podprzestrzeni, 172
  - rozdzielna, 14
  - zupełna, 14
- krawędzie
  - równoległe, 86
  - sąsiednie, 89
  - wielokrotne, 86
- krawędź, 86, 98, 106, 109, 113, 136, 140
- kres
  - dolny, 14
  - górny, 14
- krok indukcyjny, 9, 11
- krotność elementu, 50
- kwantyfikatory
  - ogólny, 261
  - szczegółowy, 261
- las, 129
  - spinający, 131, 186
  - minimalny, 152
- lemat o uściskach dłoni, 90
- liczba
  - $\mu$ , 191
  - chromatyczna, 111, 118
  - cyklomatyczna, 131
  - nieporządków, 62
- liczby
  - Bella, 66, 82
  - Catalana, 80, 136
  - Fibonacciego, 20, 25, 46, 75, 79, 100
  - uogólnione, 23
  - harmoniczne, 10, 17, 40
  - Lucasa, 25
  - Stirlinga
    - cykliczne, 39
    - drugiego rodzaju, 63, 71, 147
    - nieoznakowane, 39
    - pierwszego rodzaju, 38, 45, 52
  - podzbiorowe, 63
- liczność zbioru, 51
- liść, 87, 89, 138
- łańcuch, 14
  - koniec, 14
  - nienasycony, 159
  - początek, 14
- łuk, 88, 125
- łuki wielokrotne, 88
- macierz, 264
  - cykli, 94, 117, 135, 136
  - fundamentalna, 135
- incydencji, 190
  - grafu, 91, 104, 116
  - grafu skierowanego, 93
- sąsiedztwa, 97, 98, 116, 117, 125
- stopni, 101
- transponowana, 96
- wag, 152
- Matlab, 91
- matroid, 181
  - baz, 181
  - bicykliczny, 188
  - binarny, 184, 186, 187
  - cykli, 182, 194
  - dualny, 192

- Fano, 186, 193
- grafowy, 186, 194
- jednorodny, 184, 197
- macierzowy, 185
- ograniczenie, 186
- reprezentowalny, 184
- rozpięć, 183
- ściągnięcie, 186
- transwersalny, 192
- trywialny, 184
- wolny, 184
- z funkcją rzędu, 182
- zbiorów niezależnych, 182
- Maxima, 234
- metryka, 107
- minor
  - grafu, 108
  - matroidu, 187
- moc zbioru skończonego, 27
- most, 121, 127, 129
- multigraf, 86
  - skierowany, 88
- multizbiór, 50
- następnik
  - lewy, 136
  - prawy, 136
- nieporządek, 62
- nierówność
  - Bernoulliego, 24
  - Weierstrassa, 24
- niezależność liniowa, 263
- niezawodność, 199
- niezmiennik
  - izomorfizmu, 197
  - Tutte'a-Gröthendiecka, 198
- nośnik
  - języka, 206
  - słowa, 206
- obraz zbioru, 27
- obszar grafu, 109
- obwód grafu, 87
- Octave, 91
- odległość, 263
- odległość między wierzchołkami, 107, 138
- ograniczenie
  - matroidu, 186
- ograniczenie zbioru
  - dolne, 14
  - górne, 14
- orientacja grafu, 125
- permanent macierzy, 35, 140
- permutacja, 30
  - bez punktów stałych, 62
  - cykliczna, 33
  - element neutralny, 33
  - identycznościowa, 32
  - nieparzysta, 35
  - odwrotna, 33
  - parzysta, 35
  - transpozycja, 35
  - zapis znormalizowany, 38
- pętla, 89, 96
  - grafu, 86, 88, 98
  - matroidu, 182
- pętle wielokrotne, 86, 88
- pierścień
  - skończony, 169
- płaszczyzna
  - afiniczna, 178
  - Fano, 176, 186
  - rzutowa, 176, 177
- podgraf, 91
- podłoga, 18
- podmacierz, 264
- podstawa indukcji, 9
- podział
  - liczby, 67
  - sprzężony, 68
  - zbioru, 54
- pokrycie
  - krawędziowe grafu, 141
  - wierzchołkowe grafu, 141
- porządek
  - częściowy, 11, 24
  - leksykograficzny, 50
  - liniowy, 12
- potęga
  - krocząca, 28
  - przyrastająca, 28, 30, 51, 52, 64, 78

- ubywająca, 28, 29, 31, 38, 44, 64
- problem kojarzenia małżeństw, 143, 190
- promień
  - drzewa, 139
  - grafu, 107
  - zbieżności, 265
- przeciwdziedzina funkcji, 27
- przeciwobraz zbioru, 27, 57
- przekrój, 158
  - minimalny, 158
  - normalny, 158
- przepływ, 157
- przepustowość, 158
- przestrzeń
  - liniowa, 171
  - metryczna, 107, 263
- pseudolas, 188
- $q$ -analog, 175
- trójkąta Pascala, 180
- reguła
  - sumowania po górnym indeksie, 53
  - sumowania równoległego, 53
- rekurencja, 15
- relacja, 11, 27
  - antysymetryczna, 11
  - przechodnia, 11
  - przystawania, 262
  - równoważności, 54, 178
  - symetryczna, 54
  - zwrotna, 11
- rodzina
  - baz, 181
  - cykli, 182, 183
  - osiągalna, 203
  - zbiorów niezależnych, 182, 183
- rozdrobienie podziału, 55
- rozkład permutacji na cykle, 33, 39, 42
- rozpięcie zbioru, 183
- rownanie charakterystyczne, 21
- rownanie rekurencyjne, 17, 75
  - liniowe, 19
  - jednorodne, 19
  - o stałych współczynnikach, 19
- rząd  $k$ , 19
- różnica
  - symetryczna, 88, 186, 262
  - zbiorów, 262
- rząd
  - cięcia, 135
  - cykliczności, 131, 134
  - geometrii rzutowej, 176
  - grafu, 131
  - grupy, 169, 199
  - grupy skończonej, 199
  - macierzy, 191, 264
  - cykli, 136
  - matroidu, 182
  - permutacji, 34, 42
  - zbioru, 182, 203
- Scilab, 91
- sieć, 158
  - przepływowa, 157
- silnia, 15, 31, 39, 43, 174
  - dolna, 28, 29, 31, 38, 44, 62, 64
  - górna, 28, 30, 51, 52, 64, 78
- skierowanie grafu, 125
- składowa
  - silnie spójna, 91
  - spójna, 91
- skojarzenie, 140
  - doskonałe, 140
  - maksymalne, 140, 162
  - pełne, 140
- słowo
  - kodowe, 209
  - proste, 206
- splot, 73
  - Fibonacciego, 79
- spójność
  - krawędziowa, 127
  - wierzchołkowa, 127
- stopień wierzchołka, 89, 90, 112, 137, 138
  - wejściowy, 90, 94, 122
  - wyjściowy, 89, 94, 122
- strumień, 157

- maksymalny, 158
- sufit, 18
- suma
  - prosta matroidów, 187
  - zbiorów, 262
- surjekcja, 27
- symbol
  - Gaussa, 174
  - Newtona, 44, 174
- system
  - osiągalny, 203
  - zachłanny, 203, 207
- szereg
  - formalny, 72
  - odwrotny, 74
  - potęgowy, 265, 266
- ściana grafu, 109
- ściągnięcie
  - krawędzi, 108, 114
  - matroidu, 186
- ściek, 157
- średnia
  - teoretyczna, 266
  - ważona, 209, 266
- średnica
  - drzewa, 139
  - grafu, 107
- tekst, 209
- tożsamość
  - Cassiniego, 21
  - Cauchy'ego, 47
- transwersala, 189
  - częściowa, 189
- trójkąt Pascala, 46
- turniej, 125
- twierdzenie
  - Brooksa, 112
  - Cauchy'ego, 38
  - Cayleya, 132
  - Diraca, 124
  - Eulera, 109
  - Fermata, 53
  - Forda-Fulkersona, 128, 159
  - Gallaia, 141
  - Halla, 143, 190
  - Kóniga, 114, 142
  - Kuratowskiego, 108
  - Landaua, 126
  - Maclaurina, 265, 266
  - Mengera, 128, 164
  - Meyniela, 126
  - o czterech barwach, 113
  - o kojarzeniu małżeństw, 142
  - Orego, 124
  - Rédeiego, 125
  - Rado, 192
  - Rado-Edmondsa, 208
  - Robbinsa, 126
  - Thomassena, 126
  - Vizinga, 112, 113
- typ permutacji, 33, 37, 38, 42
- ujście, 157, 162
- ułamki proste, 265
- usunięcie
  - krawędzi, 108, 114
  - wierzchołka, 108
- waga
  - elementu, 207
  - krawędzi, 152
  - symbolu, 209
  - wierzchołka, 138
  - zbioru, 207
- warstwa, 178, 263
- warstwy funkcji, 57
- wartość oczekiwana, 209, 266
- warunek
  - brzegowy, 19
  - początkowy, 11
- wejście, 157, 158
- wektor, 263
- wielomian
  - chromatyczny, 114, 118, 198, 200
  - nierozkładalny, 170, 179
  - przepływowy, 200
  - Tutte'a, 196
- wierzchołek, 86, 98, 105, 109, 111, 136, 140
  - centralny, 138, 147
  - centroidalny, 138, 147

- incydentny z krawędzią, 89
- izolowany, 89, 92
- końcowy, 89
- rozcinający, 127
- wiszący, 138
- wierzchołki
  - incydentne, 88, 89
  - sąsiednie, 89, 137
- własność
  - przedziałowa, 205
  - Steinitza, 181
  - wymiany, 181
  - mocna, 212
- współczynnik
  - dwumianowy, 44, 77
  - wielomianowy, 47
- wyjście, 158
- wymiar
  - geometrii rzutowej, 176
  - warstwy, 178
- wysokość drzewa, 87
- wyznacznik, 36, 264
- wzór
  - Cayleya, 147, 244
  - dwumianowy, 44
  - Newtona, 44
  - Robbinsa, 31
  - Stirlinga, 31
- zasada
  - indukcji matematycznej, 9, 11
  - maksimum, 13
  - minimum, 13
  - szufladkowa Dirichleta, 55
  - uogólniona, 58
  - włączania-wyłączania, 59
- zbiór
  - częściowo uporządkowany, 11
  - domknięty, 183
  - krawędzi, 86, 114, 186
  - łuków, 88
  - niezależny, 182, 203
  - permutacji, 31, 33
  - rozdzielający
    - graf spójny, 127
    - wierzchołki, 128
  - rozspajający
    - graf spójny, 127
    - wierzchołki, 128
  - wewnętrznie stabilny, 140
  - wierzchołków, 86, 114
  - wykonalny, 203
  - z powtórzeniami, 50
- złoty podział, 22
- złożenie
  - permutacji, 32, 35
  - transpozycji, 36
- zmienna losowa, 266
- znak permutacji, 35, 37
- źródło, 157, 162

# PROGRAM PARTNERSKI

GRUPY WYDAWNICZEJ HELION



1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ

Zmień swoją stronę WWW  
w działający bankomat!

**Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!**

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA WYDAWNICZA

 **Helion SA**